Badanie funkcji algebraicznych

Stanisław Ewert-Krzemieniewski

January 11, 2010

1 Przykłady

Przykład 1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $y = f(x) = \frac{1-x+\sqrt{x-1}}{x}$.

Dziedzina funkcji D**.** Mianownik w definicji funkcji jest określony gdy $x \neq 0$. Pierwiastek rzeczywisty stopnia drugiego istnieje gdy $x-1 \geq 0$. Zatem $D = \{x \geq 1,\ x \in R\} = \ < 1, \infty)$.

Zachowanie się funkcji na krańcach przedziałów.

$\lim\limits_{x->1^+} \frac{1-x+(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left[\frac{0}{1^+}\right] = 0,$

$\lim\limits_{x->\infty} \frac{1-x+(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left[\frac{-\infty+\infty}{\infty}\right]$. Aby móc zastosować regułę d'Hospitala wzór definiujący funkcję należy przekształcić: $\frac{1-x+(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{-x}{x} + \frac{1+(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x} = -1 + \frac{1+(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x}$.

$\lim\limits_{x->\infty} \left(-1 + \frac{1+(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x}\right) = -1 + \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1 + \lim\limits_{x->\infty} \frac{\left(1+(x-1)^{\frac{1}{2}}\right)'}{x'} = -1 + \lim\limits_{x->\infty} \frac{+\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{1} = -1 + \lim\limits_{x->\infty} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = -1$. Zatem prosta $y = -1$ jest asymptotą wykresu funkcji.

Pochodna i jej dziedzina D'.

$y' = \frac{\left[-1+\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right]x-\left[1-x+(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]1}{x^2} = \frac{2-x-2\sqrt{x-1}}{2x^2\sqrt{x-1}}.$

Widać, że dziedziną pochodnej jest zbiór $D' = (1, \infty)$.

Miejsca zerowe pochodnej i jej granice.

$y' = 0 <=> 2 - x - 2\sqrt{x-1} = 0$. Przenosimy składnik zawierający pierwiastek na prawą stronę równania i podnosimy je stronami do kwadratu. Oprócz założenia $x > 1$ musimy jeszcze przyjąć, że $x \leq 2$.

$2 - x = 2\sqrt{x-1},$

$(2-x)^2 = \left(2\sqrt{x-1}\right)^2,$

$x^2 - 8x + 8 = 0$. Równanie to ma dwa rozwiązania: $2\sqrt{2}+4$ oraz $4-2\sqrt{2}$, z których tylko drugie spełnia nierówność $2 \geq 4 - 2\sqrt{2} > 1$.

$\lim\limits_{x->1^+} \frac{2-x-2\sqrt{x-1}}{2x^2\sqrt{x-1}} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$. Zatem, w otoczeniu prawostronnym punktu $x = 1$, kąt pomiędzy styczną a osią Ox jest bliski kątowi prostemu.

$\lim\limits_{x->\infty} \frac{2-x-2\sqrt{x-1}}{2x^2\sqrt{x-1}} = 0$, co wynika z faktu posiadania przez funkcję asymptoty poziomej. Granicę tą można obliczyć bezpośrednio, np. dzieląc licznik i mianownik przez x.

Pochodna rzędu drugiego.

$\left(\frac{1-x+\sqrt{x-1}}{x}\right)'' = \frac{1}{4x^3(x-1)^{\frac{3}{2}}}\left(8\,(x-1)^{\frac{3}{2}} - 12x + 3x^2 + 8\right)$, $x > 1$.

$y'' = 0 <=> 8\,(x-1)^{\frac{3}{2}} - 12x + 3x^2 + 8 = 0$. Aby rozwiązać to równanie, przenosimy wielomian na prawą stronę i podnosimy obie strony otrzymanej równości do potęgi drugiej:

$8\,(x-1)^{\frac{3}{2}} = -3x^2 + 12x - 8$ gdzie $-3x^2 + 12x - 8 \geq 0$,

$\left(8\,(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(-3x^2 + 12x - 8\right)^2$,

$64x^3 - 192x^2 + 192x - 64 = 9x^4 - 72x^3 + 192x^2 - 192x + 64$,

$-9x^4 + 136x^3 - 384x^2 + 384x - 128 = 0$.

Ostatnie równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 o przybliżonych wartościach 1.57041 oraz 11.7906700000090. Numerycznie można sprawdzić, że w otoczeniu pierwszego z nich y'' zmienia znak, a w otoczeniu drugiego nie. Zatem x_1 jest punktem przegiecia. Zauważmy, że koniecznośc istnienia takiego punktu wynika z istnienia jedynego maksimum funkcji w punkcie $x = 4-2\sqrt{2}$ (lub, równoważnie, z nieistnienia ekstremów lokalnych dla $x > 4 - 2\sqrt{2}$) oraz istnienia asymptoty poziomej $y = -1$.

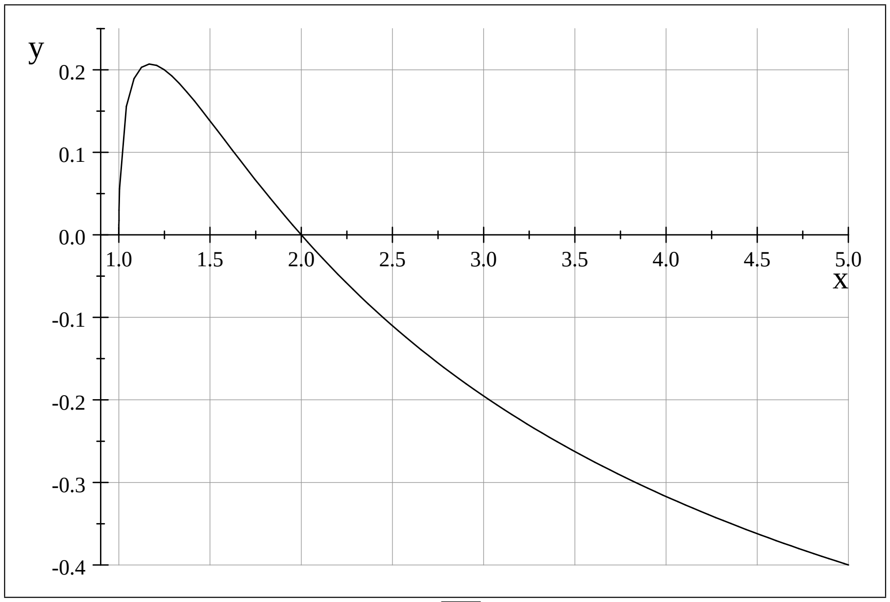
Tabela.

x	1	$(1, 4-2\sqrt{2})$	$4-2\sqrt{2}$	$(4-2\sqrt{2}, \infty)$
y'	$\nexists$	$+$	0	$-$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	$\searrow_{-1}$
			maks.lok.	

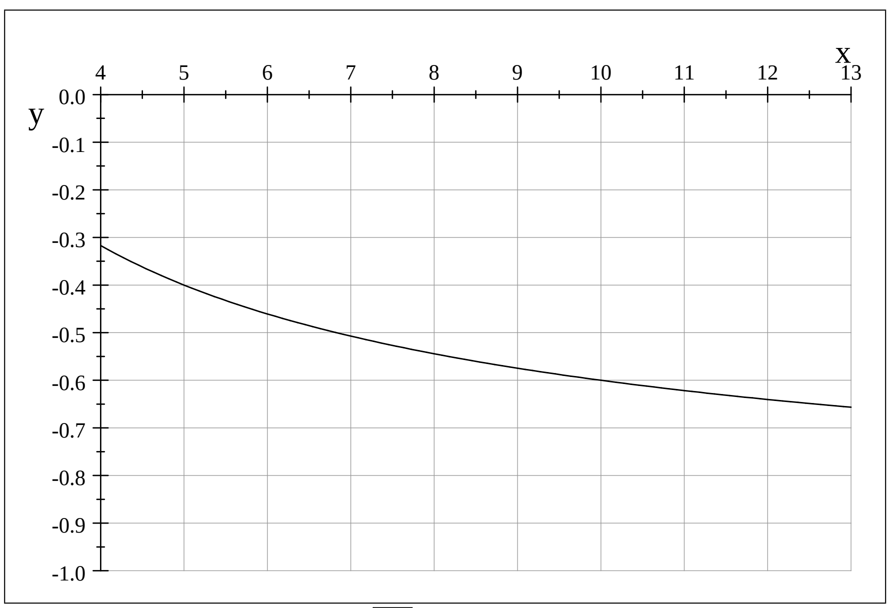
,

$\left[\frac{1-x+\sqrt{x-1}}{x}\right]_{x=4-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}-4}\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} - 3\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

Wykresy.



$y = \frac{1-x+\sqrt{x-1}}{x}$



$y = \frac{1-x+\sqrt{x-1}}{x}$, $x \in (4, 13)$

Przykład 2. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $y = f(x) = \frac{1-x+\sqrt[3]{x-1}}{x}$.

Dziedzina funkcji D**.** Mianownik w definicji funkcji jest określony gdy

$x \neq 0$. Pierwiastek rzeczywisty stopnia trzeciego istnieje zawsze. Zatem $D = R - \{0\} = \{x \neq 0,\ x \in R\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Zachowanie się funkcji na krańcach przedziałów.

$\lim\limits_{x->0} \frac{1-x+(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x->0} \frac{\left(1-x+(x-1)^{\frac{1}{3}}\right)'}{x'} = \lim\limits_{x->0} \frac{-1+\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}}{1} = \lim\limits_{x->0}\left(-1 + \frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}\right) = -\frac{2}{3}$.

Rozważana funkcja f nie jest ciągła w $x = 0$, gdyż nie jest określona w tym punkcie. Natomiast funkcja $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ -\frac{2}{3}, & x = 0 \end{cases}$ jest ciągła na zbiorze R.

$\lim\limits_{x->\infty} \frac{1-x+(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x} = \left[\frac{-\infty+\infty}{\infty}\right]$. Aby móc stosować regułe d'Hospitala, należy dokonać przekształcenia.

$\lim\limits_{x->\infty} \frac{1-x+(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim\limits_{x->\infty}\left(-1 + \frac{1+(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x}\right) = -1 + \lim\limits_{x->\infty} \frac{1+(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x} =$

$-1 + \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1 + \lim\limits_{x->\infty} \frac{\left(1+(x-1)^{\frac{1}{3}}\right)'}{x'} =$

$-1 + \lim\limits_{x->\infty} \frac{\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}}{1} = -1.$

Analizując powyższy rachunek stwierdzamy, że również $\lim\limits_{x->-\infty} \frac{1-x+(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x} = -1$.

Zatem prosta $y = -1$ jest asymptotą wykresu funkcji.

Pochodna i jej dziedzina D'.

$y' = \frac{\left[-1+\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\right]x - \left[1-x+(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]1}{x^2} = \frac{\frac{3-2x}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}} - 1}{x^2} = \frac{3-2x-3(x-1)^{\frac{2}{3}}}{3x^2(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

Widać, że dziedziną pochodnej jest zbiór $D' = \{x \in R, x \neq 0, x \neq 1\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Miejsca zerowe pochodnej i jej granice.

$y' = 0 <=> 3 - 2x - 3(x-1)^{\frac{2}{3}} = 0$. Aby rozwiązać to równanie przenosimy część zawierającą potęgę wymierną na prawą stronę, a następnie podnosimy do potęgi trzeciej: $(3-2x)^3 = (3(x-1)^{\frac{2}{3}})^3$. Stąd $(3-2x)^3 = 27(x-1)^2$. Po wykonaniu potęgowań znajdujemy $(8x-9)x^2 = 0$. Ostatecznie $x = 0$, $(0 \notin D')$, oraz $x = \frac{9}{8}$.

Zbadajmy granice pochodnej.

$\lim\limits_{x->1} y' = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$. Oznacza to, że w pobliżu punktu $x = 1$ kąt nachylenia stycznej do wykresu względem osi Ox jest bliski kątowi prostemu. Prosta $x = 1$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(1, f(1))$.

$\lim\limits_{x->0} y' = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x->0} \frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}} \cdot \lim\limits_{x->0} \frac{3-2x-3(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x^2} = \frac{1}{3} \lim\limits_{x->0} \frac{\left(3-2x-3(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)'}{(x^2)'} =$

$\frac{1}{3} \lim\limits_{x->0} \frac{-2-2(x-1)^{-\frac{1}{3}}}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{3} \lim\limits_{x->0} \frac{\left(-2-2(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)'}{(2x)'} = \frac{1}{3} \lim\limits_{x->0} \frac{\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{4}{3}}}{2} =$

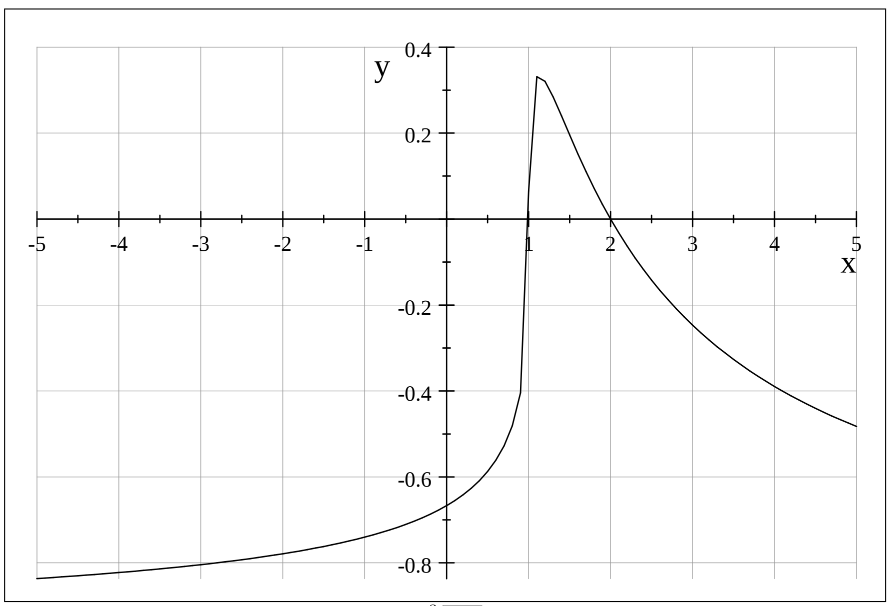
$\frac{1}{9}$

Na koniec zauważmy, że $\lim\limits_{x->\infty} y' = \lim\limits_{x->-\infty} y' = 0$ wynika z faktu posiadania przez badaną funkcję asymptoty o współczynniku kierunkowym 0. Obie te granice można wyliczyć bezpośrednio, np. dzieląc licznik i mianownik przez x.

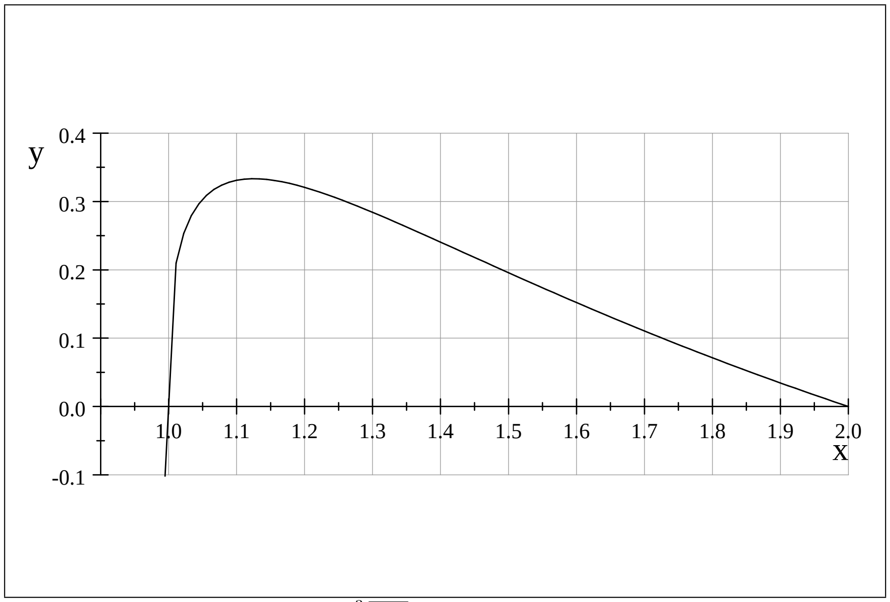
Tabela.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \frac{9}{8})$	$\frac{9}{8}$	$(\frac{9}{8}, \infty)$
y'	$+$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
y	$_{-1} \nearrow^{-\frac{2}{3}}$	$\nexists$	$-\frac{2}{3} \nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow_{-1}$
						maks. lok.	

Wykresy. Na osiach układu współrzędnych obrano różne skale. Drugi wykres przedstawia funkcję w przedziale (0.9, 2.0).



$y = \frac{1-x+\sqrt[3]{x-1}}{x}$



$y = \frac{1-x+\sqrt[3]{x-1}}{x}$, $x \in (0.9,\, 2)$

Uzupełnienia. Z własności pierwszej pochodnej oraz z istnienia asymptoty poziomej można wywnioskować istnienie co najmniej jednego punktu przegięcia na prawo od $x = 1$. Poniżej przedstawiono obliczenia związane z drugą pochodną badanej funkcji.

$y'' = \left(\frac{3-2x-3(x-1)^{\frac{2}{3}}}{3x^2(x-1)^{\frac{2}{3}}}\right)' = \frac{2}{9x^3(x-1)^{\frac{5}{3}}}\left(9\,(x-1)^{\frac{5}{3}} - 15x + 5x^2 + 9\right)$, $x \neq 0$ i $x \neq 1$,

$y'' = 0 <=> 9\,(x-1)^{\frac{5}{3}} - 15x + 5x^2 + 9 = 0$,

$9\,(x-1)^{\frac{5}{3}} = -1(-15x + 5x^2 + 9)$,

$\left(9\,(x-1)^{\frac{5}{3}}\right)^3 = \left(-1(-15x + 5x^2 + 9)\right)^3$,

$729\,(x-1)^5 = -\left(5x^2 - 15x + 9\right)^3$,

$729\,(x-1)^5 + \left(5x^2 - 15x + 9\right)^3 = 125x^6 - 396x^5 + 405x^4 - 135x^3 = x^3\left(125x^3 - 396x^2 + 405x - 135\right).$

Drugi czynnik ma jeden pierwiastek rzeczywisty, którego przybliżona wartość wynosi $x = 1.432\,6$. Jest to zatem punkt przegięcia wykresu badanej funkcji. Analizując zachowanie się pierwszej pochodnej w otoczeniu punktu $x = 1$, dochodzimy do wniosku, że jest to również punkt przegięcia. Istotnie, w otoczeniu tego punktu pochodna najpierw rośnie nieograniczenie, w $x = 1$ nie jest określona, a z prawej strony maleje od ∞. Natomiast w otoczeniu punktu $x = 0$ druga pochodna nie zmienia znaku.

2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zbadaj przebieg zmienności podanych funkcji. Na podstawie otrzymanych informacji narysuj starannie ich wykresy.

1. $y = \frac{1-x+\sqrt{x-1}}{x-1}$.

2. $y = \frac{1-x+\sqrt{1-x}}{x-1}$.

3. $y = \frac{1-x+\sqrt{1-x}}{x}$.

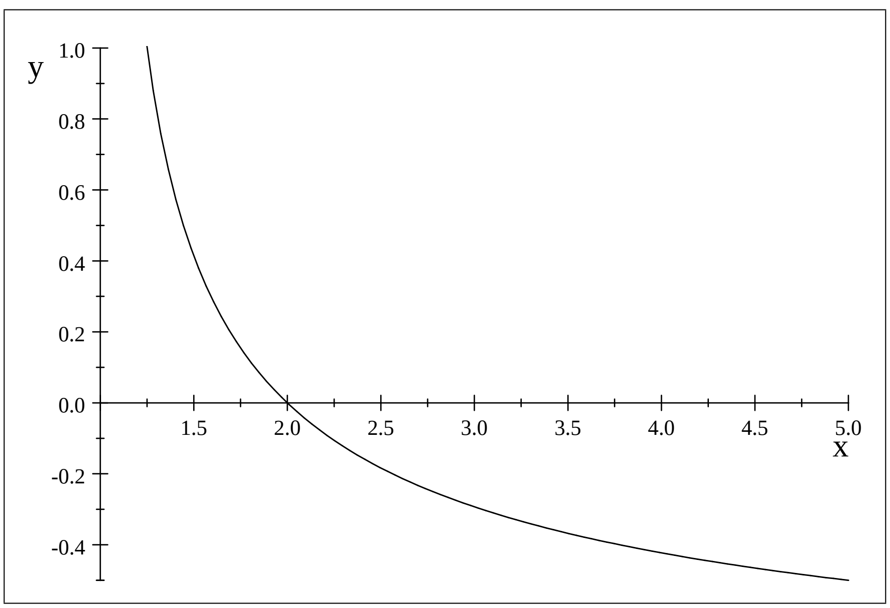
4. $y = \frac{1-x+\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$.

5. $y = \frac{1-x+\sqrt[3]{1-x}}{x-1}$.

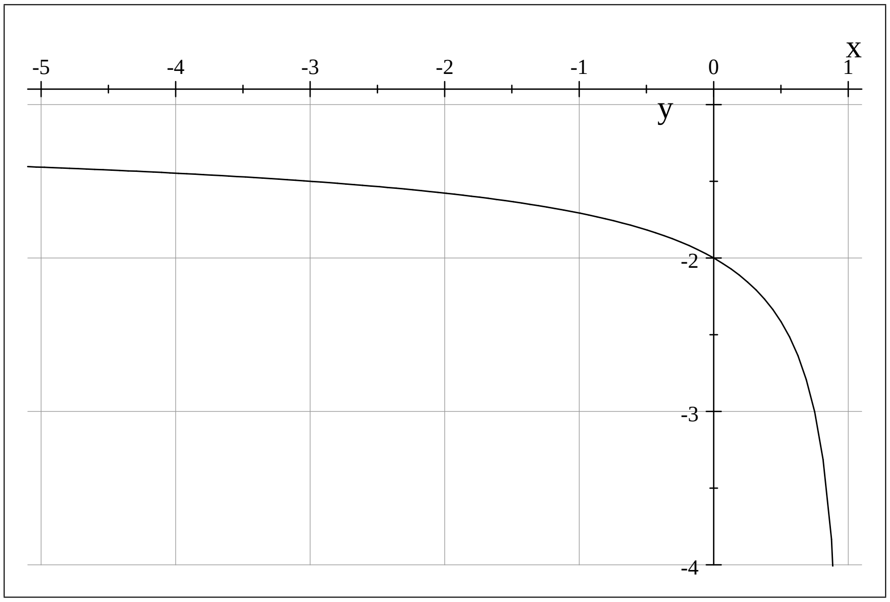
6. $y = \frac{1-x+\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

3 Odpowiedzi - wykresy

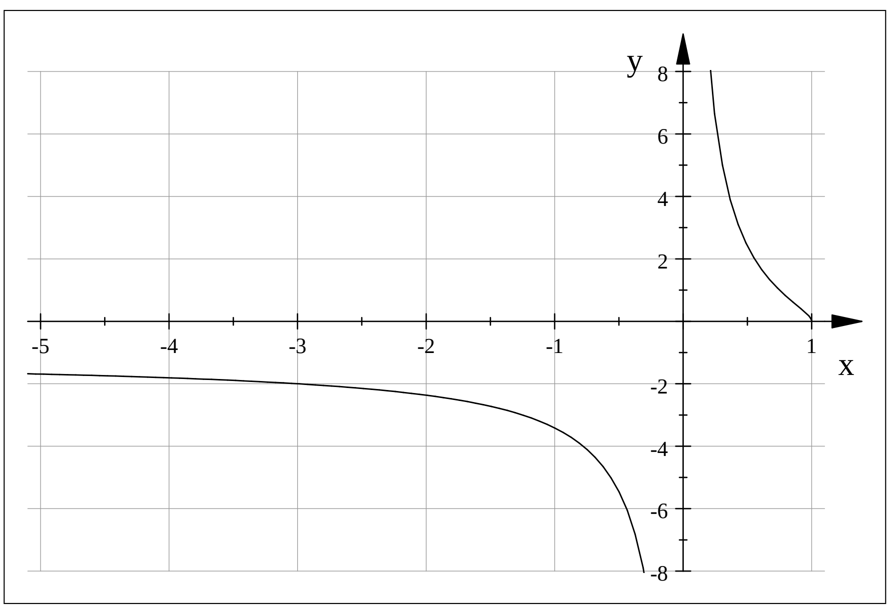
1. $y = \frac{1-x+\sqrt{x-1}}{x-1}$.



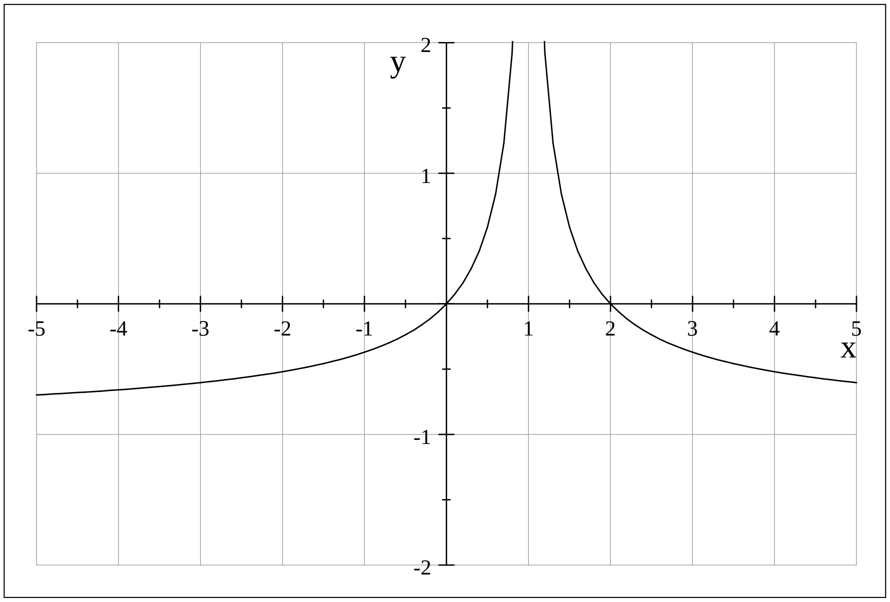
2. $y = \frac{1-x+\sqrt{1-x}}{x-1}$.



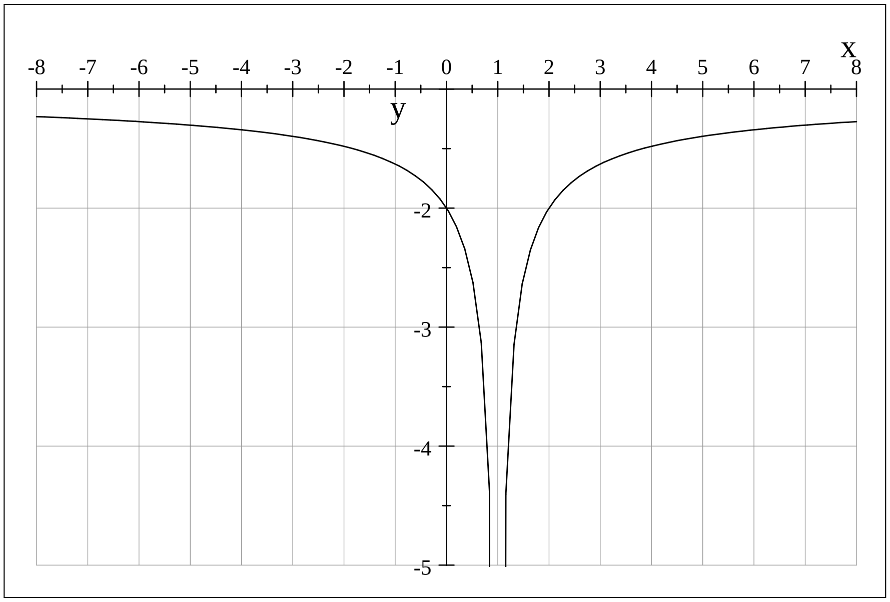
3. $y = \frac{1-x+\sqrt{1-x}}{x}$.



4. $y = \frac{1-x+\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$.



5. $y = \frac{1-x+\sqrt[3]{1-x}}{x-1}$.



6. $y = \frac{1-x+\sqrt[3]{1-x}}{x}$.