Zbadaj funkcję $y = \arcsin(x^2-1)$.

1) Dziedzina: $\arcsin t$ jest określony dla $t \in \langle -1, 1\rangle$.
Zatem $-1 \le x^2-1 \le 1$, skąd $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.

2) Pochodna: $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}$. Widać, że $x \neq 0$.

Zatem $D_{y'} = \langle -\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}\rangle$ oraz
$y'(x) < 0$ dla $x \in \langle -\sqrt{2}, 0)$,
$y'(x) > 0$ dla $x \in (0, \sqrt{2}\rangle$, $y(0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Można inaczej: przekształcamy y'

$$y' = \frac{2x}{\sqrt{-x^4+2x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{2-x^2}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} \quad \text{skąd } x \neq 0.$$

Dalej: $y' = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & \text{dla } x \in (0, \sqrt{2}) \\ -\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & \text{dla } x \in \langle -\sqrt{2}, 0) \end{cases}$.

Pomimo tego, że w $x=0$ pochodna nie istnieje, funkcja ma w tym punkcie minimum lokalne.

x	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$
y'		$-$	X	$+$	
y	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Tyle wystarczyło.

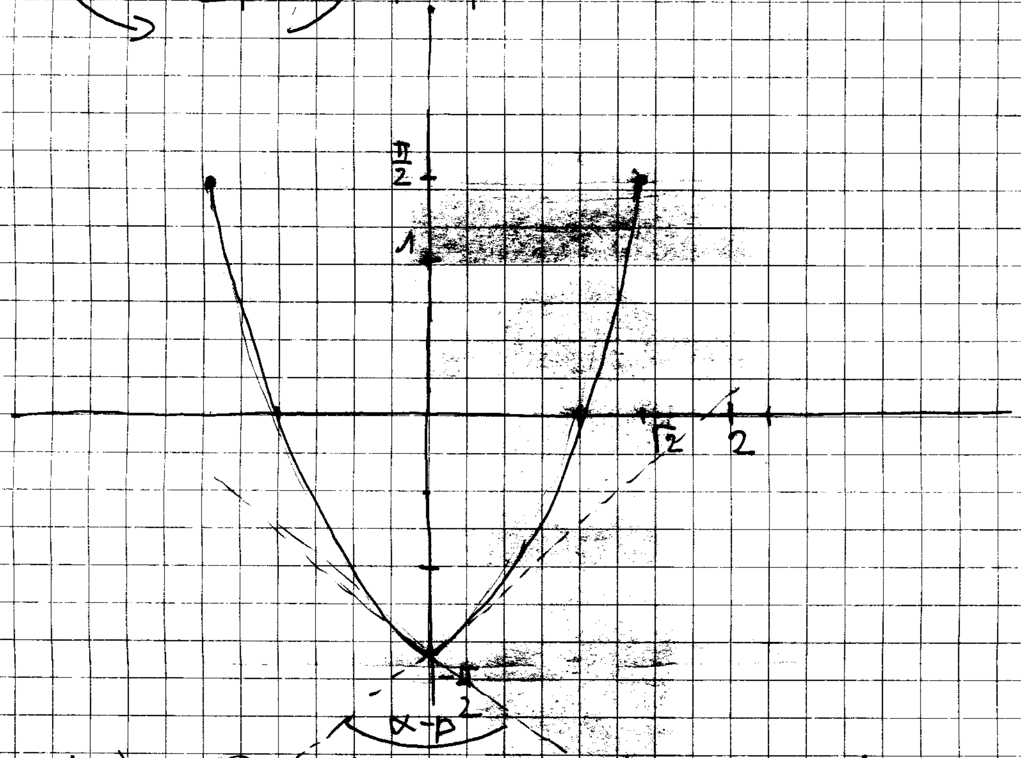
3) Dalsze badanie pochodnej:

$$y'' = \pm\left(2(2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \begin{cases} 2(2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot x, & x \in (0, \sqrt{2}), \\ -2(2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot x, & x \in (-\sqrt{2}, 0). \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} y' = \sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} y' = -\sqrt{2}$, w $x=0$ mamy ostrze.

$\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} y' = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}} y' = -\infty$

x	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$
y'		$-$	X	$+$	
y''		$+$	X	$-$	
	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



$y(x) = 0 \iff x = 1 \lor x = -1$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}{1-(\sqrt{2})^2} = -2\sqrt{2}$$

4) UWAGA o dziedzinie pochodnej $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}$:

Zawsze $D_{y'} \subset D_y$. Miejscem zerowym pochodnej może być tylko $x=0$. Zauważmy jednak, że jest to również miejsce zerowe mianownika (wystarczy podstawić). Zatem $0 \notin D_{y'}$

5) $-1 \leq x^2-1 \leq 1 \iff 0 \leq x^2 \leq 2 \iff 0 \leq x^2$ i $x^2 \leq 2 \iff$

$x \in R$ i $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{2} \iff x \in R$ i $|x| \leq \sqrt{2} \iff$

$x \in R$ i $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$