

## Całki nieoznaczone i oznaczone

**zad. 1** Obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$	a) $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$	b) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
c) $\int \frac{x}{\sqrt{3-5x^2}} dx$	ć) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx$	d) $\int \frac{\cos 5x}{\sin^6 5x} dx$
e) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx$	e) $\int \frac{x^2}{x^6+4} dx$	f) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$
g) $\int x \sin x dx$	h) $\int x^2 e^{3x} dx$	i) $\int \ln^2 x dx$
j) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$	k) $\int \arccos x dx$	l) $\int \operatorname{arctg} x dx$
ł) $\int x \arcsin x dx$	m) $\int x \operatorname{arctg} x dx$	n) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$
ń) $\int 3^x \cos x dx$	o) $\int \sin(\ln x) dx$	ó) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$
p) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$	q) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2} dx$	r) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
s) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$	ś) $\int x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} dx$	t) $\int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$
u) $\int \arcsin^2 x dx$	w) $\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$	x) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

**zad. 2** Obliczyć całki nieoznaczone funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$	b) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+4x+20}$	c) $\int \frac{x+4}{x^2-10x+25} dx$
d) $\int \frac{xdx}{x^2-7x+10}$	e) $\int \frac{x^3+3}{x^2-6x+8} dx$	f) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4} dx$
g) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$	h) $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$	i) $\int \frac{dx}{x^5+x^3}$
j) $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5}$	k) $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)(x^2+2x+1)}$	l) $\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x} dx$

**zad. 3** Obliczyć całki nieoznaczone funkcji niewymiernych:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$	b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$	c) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2-10x+25}} dx$
d) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$	e) $\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx$	f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

**zad. 4** Obliczyć całki nieoznaczone funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \sin x \cos^4 x dx & \text{b)} \int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx & \text{c)} \int \sin 5x \cos 3x dx \\ \text{d)} \int \sin 4x \sin 8x dx & \text{e)} \int \frac{dx}{2 + \sin x} & \text{f)} \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x} \end{array}$$

**zad. 5** Obliczyć całki oznaczone:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-\frac{2}{5}}^{\frac{2}{5}} \frac{dx}{\sqrt{4 + 25x^2}} & \text{b)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{5 + 4x - 4x^2}} & \text{c)} \int_1^2 x(x^2 + 1)e^{x^2} dx \\ \text{d)} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} & \text{e)} \int_0^6 \frac{xdx}{\sqrt{4 + x^4}} & \text{f)} \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}} \\ \text{g)} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{1 + \cos x} & \text{h)} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{xdx}{\cos^2 x} & \text{i)} \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \\ \text{j)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx & \text{k)} \int_{\frac{1}{2}}^e |\ln x| dx & \text{l)} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x}} \\ \text{m)} \int_0^2 f(x) dx, \text{ gdzie } f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} x & \text{dla } x \in [-1, 1] \\ e^x & \text{dla } x \in (1, 3] \\ x^2 & \text{dla } x \in (3, \infty) \end{cases} & \text{n)} \int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx & \\ \text{o)} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} & \text{p)} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^3} & \text{r)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{1 + x^2} dx \\ \text{s)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} & \text{t)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x - 4x^2}} & \text{u)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \\ \text{w)} \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} \end{array}$$

**zad. 6** Wyznaczyć funkcję  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  dla  $x \in [0, 3]$ , gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ -2x + 4 & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 1 & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases}$$

**zad. 7** Wyznaczyć funkcję  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  określoną wzorem:

$$f(x) = \int_0^x ||t - 1| - 2| dt$$

**zad. 8** Obliczyć pole obszaru ograniczonego paraboli  $y = x^2$  i prostą  $2x - y + 3 = 0$

**zad. 9** Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolami  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{2}x^2$  i prostą  $y = 3x$

**zad. 10** Obliczyć pole obszaru ograniczonego okręgiem  $x^2 - 12x + y^2 = 0$  i parabolą  $y^2 = 6x$

**zad. 11** Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi o równaniach:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ i } \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$$

**zad. 12** Obliczyć długość łuku krzywej  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

**zad. 13** Obliczyć długość łuku krzywej określonej parametrycznie

$$x = t^2, \quad y = t - \frac{1}{3}t^3, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}$$

**zad. 14** Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót dookoła osi Ox sinusoidy  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$

**zad. 15** Obliczyć objętość bryły, która powstaje z obrotu krzywej  $y = \frac{1}{1+x^2}$  dookoła jej asymptoty

**zad. 16** Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu krzywej danej równaniami parametrycznymi  $x = a \sin^3 t$ ,  $y = a \cos^3 t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  i obracającej się dookoła osi Ox

**zad. 17** Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej z obrotu krzywej  $y = \tan x$  dookoła osi Ox, gdzie  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

**zad. 18** Obliczyć pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót dookoła osi Ox krzywej danej parametrycznie  $x = t^2$ ,  $y = t - \frac{1}{3}t^3$ ,  $0 \leq t \leq \sqrt{3}$