Funkcje zespolone

zad. 1 Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+2ni}{n^2\sqrt{n}}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\sqrt{n}}{i\left(1+n^2\right)}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in+n^2+in^3}{1+n^3}$ **e)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(in)^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{3^n}$ **h)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+i}{in^4+1}$ **i)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i\sqrt{n}}{n}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3i}{\left(i\sqrt{n}\right)^3}$ **k)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+i)^n}{n}$ **l)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+i)^5}{n^7}$

zad. 2 Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną funkcji $f(z)$:

a) $f(z)=z^3$ **b)** $f(z)=z^4-z$ **c)** $f(z)=z^2+z+i$

d) $f(z)=\sin z$ **e)** $f(z)=\operatorname{tg} z$

zad. 3 Sprawdzić, czy funkcja $f(z)$ spełnia równania Cauchy-Riemanna:

a) $f(z)=\bar{z}$ **b)** $f(z)=z\cdot\bar{z}$ **c)** $f(z)=\left(\bar{z}\right)^2$

d) $f(x)=\frac{1}{z}$

zad. 4 Znaleźć funkcję holomofriczną $f(z)$ mając daną część rzeczywistą $u(x,y)$:

a) $u(x,y)=x^4+y^4-6x^2y^2-2x^2+2y^2$

b) $u(x.y)=e^x\sin y$

zad. 5 Znaleźć funkcję holomofriczną $f(z)$ mając daną część urojoną $v(x,y)$:

a) $v(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$

b) $v(x.y)=e^{2x}\sin 2y+x^2-y^2$

zad. 6 Obliczyć całki:

a) $\int_K \frac{1}{z}dz$ K – odcinek o początku w punkcie $z_0=1$ i końcu w $z_1=1+i$

b) $\int_K ze^z dz$ K – łuk elipsy $x^2+2y^2=1$ o początku w $z_0=1$ i końcu $z_1=\frac{i}{\sqrt{2}}$

c) $\int_K e^z\,dz$ K – łuk okręgu $|z| = 1, y \geq 0$ o początku w $z_0 = 1$ i końcu $z_1 = -1$

d) $\int_K z \cdot \overline{z}\,dz$ K – łamana zamknięta o wierzchołkach $z_0 = 0,\ z_1 = 1,\ z_2 = i$

e) $\int_K |z|^2\,dz$ K – łamana zamknięta skierowana ujemnie o wierzchołkach $z_0 = 1,\ z_1 = i,\ z_2 = -1$

zad. 7 Obliczyć całki (korzystając ze wzoru Cauchy'ego):

a) $\oint_C \frac{\cos z}{z}dz$, gdzie C jest elipsą $x^2 + 4y^2 = 1$ skierowaną ujemnie

b) $\oint_C \frac{z}{z^4 - 1}dz$, gdzie C : $|z-2| = 2$

c) $\oint_C \frac{(\sinh z)^2}{z^2+1}dz$, gdzie C jest łamaną zamkniętą o wierzchołkach: 0 , 1-i, 1+i

d) $\oint_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}dz$, gdzie C : $|z| = \frac{1}{2}$

e) $\oint_C \frac{\sinh z}{(z+2i)^2}dz$, gdzie C : $|z| = 3$

f) $\oint_C \frac{2\sin z}{(z-i)^2}dz$, gdzie C jest elipsą $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

g) $\oint_C \frac{e^z}{z^4}dz$, gdzie C jest łamaną zamkniętą o wierzchołkach: 1, i, -1, -i

zad. 8 Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję $f(z)$ w pierścieniu $P(z_0, r, R)$

a) $f(z) = \frac{1}{z(z+4)}, P(0,4,\infty)$ **b)** $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}, P(0,0,1)$

c) $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)}, P(0,2,\infty)$ **d)** $f(z) = \frac{1}{(z+3)(z+2)}, 2 < |z| < 3$

f) $f(z) = \frac{2}{z(z-1)(z-2)}$

1.P(0,1,2) **2.**P(0,0,1) **3.**P(3,2,3)

zad. 9 Obliczyć residua funkcji w podanych punktach:

a) $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}$ $z = 0, z = 1$

b) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}$ $z = i, z = -i$

c) $f(z) = \dfrac{z^3 + z^2 + 2}{z(z^2 - 1)^2}$ $\quad z = 0, z = 1, z = -1$

d) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^4}$ $\quad z = 1$

zad.10 Obliczyć całki (za pomocą residuów):

a) $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, gdzie C $: |z - 1 - i| = \sqrt{2}$

b) $\oint\limits_C \dfrac{\sin z}{e^z - 1} dz$, gdzie C $: |z - 4i| = 5$

c) $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z^2-1)(z-3)^3}$, gdzie C $: |z - 2| = 2$

d) $\oint\limits_C \dfrac{z^2+1}{z(z^2+4)} dz$, gdzie C $: |z| = 3$