Funkcje cyklometryczne

April 11, 2010

Potrzebne wiadomości: znajomość definicji i własności funkcji cyklometrycznych, podstawowe wartości funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy dwóch kątów, wzory redukcyjne.

1. Wyznacz dziedziny podanych funkcji:
   (a) $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$,
   (b) $f(x) = \arccos \frac{3x-1}{2}$,
   (c) $f(x) = arctg(x^2 - 2x)$,
   (d) $f(x) = arctg(x + \frac{1}{x})$,
   (e) $f(x) = \arccos(x^2 - 2x)$,
   (f) $f(x) = \arcsin \frac{2x-1}{3x}$,
   (g) $f(x) = \arcsin(1 - \sqrt{x})$.

2. Oblicz dokładne wartości podanych wyrażeń:
   (a) $\arcsin 0, \arcsin(-1), \arcsin(-\frac{1}{2}), \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}, \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}), \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\arcsin 1$,
   (b) $arctg0$, $arctg(-1)$, $arctg(-\sqrt{3})$, $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$, $arctg1$, $arctg\sqrt{3}$,
   (c) $\arccos 0$, $\arccos 1$, $\arccos(-1)$, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\arccos(-\frac{1}{2})$, $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$,
   (d) $arcctg0$, $arcctg(-1)$, $arcctg(-\sqrt{3})$, $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$, $arcctg1$, $arcctg\sqrt{3}$.

3. Oblicz:
   (a) $\arcsin(\sin \frac{\pi}{6})$, $\arcsin(\sin \frac{5}{6}\pi)$, $\arcsin(\sin \frac{11}{6}\pi)$, $\arcsin(\sin \frac{23}{6}\pi)$, $\arcsin(\sin \frac{27}{6}\pi)$,
   (b) $\sin(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\sin(\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\cos(\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\sin(\arccos(\frac{1}{2})$,
   (c) $\sin(arctg\sqrt{3})$, $\cos(arctg\sqrt{3})$, $\sin(arctg1)$, $\cos(arctg(-1))$,
   (d) $tg(arctg(\frac{1}{5})$, $arctg(tg(\frac{3}{8})$, $\sin(\arcsin(\frac{1}{7}))$, $\cos(\arcsin(\frac{3}{7}))$.

4. Rozwiąż nierówności:

(a) $\arcsin x < \frac{\pi}{4}$, $\arcsin 2x < \frac{\pi}{4}$, $\arcsin 3x > \frac{\pi}{6}$, $2\arcsin 2x \geq \pi$, $\arcsin 3x > 0$,

(b) $\arccos x < \frac{\pi}{4}$, $\arccos 2x < \frac{\pi}{4}$, $\arccos 3x > \frac{\pi}{6}$, $2\arccos 2x \geq \pi$, $\arccos 3x > 0$,

(c) $arctgx < \frac{\pi}{4}$, $arctgx > \frac{\pi}{6}$, $arctg2x < \frac{2}{3}$, $arctg(x-1) > \frac{3}{2}$, $arctg(x+2) > -\frac{7}{5}$,

(d) $arcctgx < \frac{\pi}{4}$, $arcctgx > \frac{\pi}{6}$, $arcctg2x < \frac{2}{3}$, $arcctg(x-1) > 2$, $arctcg(x+2) > \frac{7}{5}$.

5. Oblicz:

(a) $\sin(\arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5})$

(b) $\sin(\arccos\frac{2}{3} - \arcsin\frac{2}{3})$

(c) $\cos(\arccos\frac{1}{7} + \arcsin\frac{1}{7})$, $\sin(arctg15 + arcctg15)$,

(d) $\cos(\arccos\frac{1}{4} - \arccos\frac{3}{4})$.

6. Funkcja f określona na zbiorze D_f jest funkcją malejącą. Rozwiąż nierówności:

(a) $D_f = <-10, 10>, \quad f(2x-3) > f(-x+4)$,

(b) $D_f = <-5, 5>, \quad f(x^2+x-1) < f(x+2)$,

(c) $D_f = (0, \infty), \quad f(x-4) > f(2x+6)$,

(d) $D_f = <-10, 10>, \quad f(2x-3) < f(x+2)$,

(e) $D_f = <-5, 10>, \quad f(3x+2) > f(-x-6)$,

(f) $D_f = <0, \infty), \quad f(2x^2+2x+1) < f(x^2-2x-4)$.

7. Funkcja f określona na zbiorze D_f jest funkcją rosnącą. Rozwiąż nierówności:

(a) $D_f = (0, \infty), \quad f(3x-7) < f(-x+9)$,

(b) $D_f = <-1, 10>, \quad f(x^2+x-1) < f(-x-2)$,

(c) $D_f = (0, \infty), \quad f(\frac{2x-1}{x}) \leq f(x)$,

(d) $D_f = (-\infty, 0), \quad f(\frac{2x-1}{x}) \leq f(x)$,

(e) $D_f = (0, \infty), \quad f(\frac{1}{x}) \leq f(x)$,

(f) $D_f = (-\infty, 0), \quad f(\frac{1}{x}) \leq f(x)$,

(g) $D_f = <-10, 10>, \quad f(6x-12) > f(3x+6)$.

8. Funkcje f oraz g sa klasy C^1, to znaczy mają ciągłe pochodne rzędu pierwszego. Zbiór wartości funkcji g jest zawarty w dziedzinie funkcji f. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji złożonej $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, jeżeli:

(a) f i g są rosnące,

(b) f jest rosnąca, a g malejąca,

(c) f jest malejąca, a g rosnąca,

(d) f i g sa malejące?

9. Wskaż funkcje rosnące i funkcje malejące:

(a) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $h(x)=\sqrt{x-2}$, $k(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$,

(b) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$, $h(x)=\log x$, $k(x)=\ln x$,

(c) $f(x)=\arcsin x$, $g(x)=\arcsin(x-1)$, $h(x)=\arccos(x+3)$, $k(x)=\arccos(2x)$, $l(x)=\arccos(-x+1)$,

(d) $f(x)=\operatorname{arcctg} x$, $g(x)=\operatorname{arcctg}(2x)$, $h(x)=\arcsin(x-3)$, $k(x)=\operatorname{arctg}(5x+\pi)$, $l(x)=\operatorname{arctg}(2x-3)$, $m(x)=\operatorname{arctg}(-2x-3)$,

(e) $f(x)=10^x$, $g(x)=e^x$, $g(x)=(\frac{2}{3})^x$, $k(x)=\frac{1}{10^x}$, $l(x)=e^{-x}$, $m(x)=(\frac{2}{5})^{-x}$.

Odpowiedzi:

1. a) $x\le -1$ lub $x\ge 1$, b) $x\in\ <-\frac{1}{3},1>$, c) $x\in R$, d) $x\ne 0$, e) $x\in\ <1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}>$, f) $x\le -1$ lub $x\ge\frac{1}{5}$, g) $0\le x\le 4$.

2. a) 0, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, b) 0, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, c) $\frac{\pi}{2}$, 0, π, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, d) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$.

3. a) $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $-\frac{1}{6}\pi$, $-\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}\sqrt{10}$.

4. a) $-1\le x<\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{1}{2}\le x<\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1}{6}<x\le\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{2}$, $0<x\le\frac{1}{3}$,
   b) $\frac{\sqrt{2}}{2}<x\le 1$, $\frac{\sqrt{2}}{4}<x\le\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{6}$, $-\frac{1}{2}\le x<0$, $-\frac{1}{3}\le x<\frac{1}{3}$,
   c) $x<1$, $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x<\frac{1}{2}tg\frac{2}{3}$, $x>1+tg\frac{3}{2}$, $x>-2+tg\frac{7}{5}$
   d) $x>1$, $x<\sqrt{3}$, $x>\frac{1}{2}ctg\frac{2}{3}$, $x<1+ctg2$, $x<-2+ctg\frac{7}{5}$.

5. a) $\frac{8+3\sqrt{21}}{25}$, b) $\frac{1}{9}$, c) 0, 0, d) $\frac{3+\sqrt{105}}{16}$.

6. a) $x\in\ <-\frac{7}{2},\frac{7}{3}>$, b) $x\in\ <-\frac{5}{2},-\sqrt{3})$, d) $x\in(5,\frac{13}{2}>$, e) $x\in\ <-\frac{7}{3},-2)$.

7. a) $x\in(\frac{7}{3},9)$, b) $x\in\varnothing$, g) $x\in(6,10>$.

8. a), d) rosnące, b), c) malejące.

9. Funkcje rosnące to: a) f, h, b) h, k, c) f, g, l, d) h, k, l, e) f, g, m.