Równania różniczkowe liniowe

June 16, 2010

Abstract

Zadania zaczerpnięto z dwóch zbiorów których autorami są Krasnov, Kisielov i Makarenko

1 Metoda Lagrange

Rozwiąż równania metodą Lagrange (metodą uzmienniania stałych).

1. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.
2. $y'' - y' = \frac{1}{e^x+1}$.
3. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.
4. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$.
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$.
6. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$.
7. $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$.
8. $y'' - y = e^{2x} \cos e^x$.
9. $y''' + y' = \frac{x-1}{x^2}$.
10. $xy'' - (1+2x^2)y' = 4x^3 e^{x^2}$.
11. $y'' - 2y' tgx = 1$.
12. $x \ln x y'' - y' = \ln^2 x$.
13. $y'' + y' tgx = \cos x ctgx$.

ODPOWIEDZI.

1. $y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x$.
2. $y = C_1 e^x + C_2 + (e^x + 1)\ln(1 + e^{-x})$.

3. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{\cos 2x}{2\cos x}$.
4. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{4}{3} \cos x \sqrt{ctgx}$.
5. $y = (C_1 + C_2 x)e^x - e^x \ln \sqrt{1+x^2} + xe^x arctgx$.
6. $y = (C_1 - x)e^{-x} \cos x + (C_2 + \ln|\sin x])e^{-x} \sin x$.
7. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{\cos 2x}{\sin x}$.
8. $y = C_1 e^x + C_2 - \cos e^{-x}$.
9. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + 1 - x + x \ln|x|$.
10. $y = C_1 e^{x^2} + C_2 + (x^2 - 1)e^{x^2}$.
11. $y = C_1 + C_2 tgx + \frac{1}{2}(1 + xtgx)$.
12. $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2 + x(\ln^2 x - 2\ln x - 2)$.
13. $y = C_1(x + \frac{1}{2})e^{-2x} + C_2 - x^2$.

2 Zastosowanie przekształcenia Laplace'a

PRZYKŁAD. Rozwiąż zagadnienie początkowe Cauchy:

$$x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1. \tag{1}$$

ROZWIĄZANIE. Mamy $x(t) \doteqdot X(p)$, $x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p)$, $x"(t) \doteqdot p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1$, $\cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}$. Równanie operatorowe odpowiadające rozwiązywanemu równaniu różniczkowemu (1) jest postaci

$$p^2 X(p) + 1 + X(p) = \frac{p}{p^2+1},$$

skąd

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Zauważmy,że otrzymany obraz rozwiązania jest już przedstawiony jako suma ułamków prostych. Ponieważ $\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t$,, $\frac{2p}{(p^2+1)^2} = -(\frac{1}{p^2+1})' \doteqdot t \sin t$, z liniowości przekształcenia Laplace'a otrzymujemy

$$X(p) \doteqdot x(t) = t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t.$$

Rozwiąż następujące równania różniczkowe z warunkami początkowymi:

1. $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1$.
2. $x\prime + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0$.

3. $x' + 2x' = t \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$

4. $x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$

5. $x''' + 2x'' + 5x' = 0, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 0.$

6. $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$

7. $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$

ODPOWIEDZI.

1. $x(t) = (t+1)e^{-t}.$

2. $x(t) = \frac{1}{5}(e^{-2t} - \cos t + 2\sin t).$

3. $x(t) = \frac{1}{25}(2e^{-2t} - 2\cos t + 14\sin t - 5t\sin t - 10t\cos t).$

4. $x(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - te^{-t} - \cos t).$

5. $x(t) = \frac{1}{5}(3e^{-t}\sin 2t - 4e^{-t}\cos 2t - 1).$

6. $x(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{t}\cos t + e^{t}\sin t).$

7. $x(t) = 2t + \frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t - \sin t).$

UWAGI. $e^{at}\sin bt \doteqdot \frac{b}{(p-a)^2+b^2}, \quad e^{at}\cos bt \doteqdot \frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}.$