

Liczby zespolone

zad. 1 Znaleźć część rzeczywistą i urojoną liczb zespolonych

a) $(3 + 2i)(4 - i)$ b) $\frac{1 + 3i}{3 + 2i}$ c) $\frac{(1 - i)^2 - i}{(1 + i)^2 + i}$

zad. 2 Znaleźć takie liczby rzeczywiste a i b , aby zachodziły równości

a) $a(2 + 3i) + b(4 - 5i) = 6 - 2i$

b) $\frac{a}{2 - i} + \frac{b + 1}{1 + i} = 2$

zad. 3 Udowodnić równości:

a) $z\bar{z} = |z|^2$

b) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

c) $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$

zad. 4 Przedstawić w postaci trygonometrycznej:

a) $\frac{(-1 - i)(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{(-1 + i\sqrt{3})}$

b) $(\sqrt{3} - i)^7$

c) $-\cos \beta + i \sin \beta$

d) $\cos \alpha - i \sin \alpha$

e) $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + i 2 \operatorname{tg} \alpha$

f) $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

g) $1 + i \operatorname{ctg} \alpha$

h) $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$

i) $2 + \sqrt{3} + i$

zad. 5 Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej:

a) $\frac{|z - 3i|}{|z + 5i|} = 1$

b) $1 \leq \operatorname{Im}(iz) < 2 \wedge |z - 1| < 2$

c) $\frac{|z|}{|z - 1|} = 2 \wedge \operatorname{Arg} z > \frac{\pi}{3}$

d) $|z - 2 - i| < 3 \wedge \operatorname{Re}(zi + 1) < 3$

e) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$

zad. 6 Przedstawić $\sin 4x, \cos 5x$ za pomocą funkcji $\sin x$ i $\cos x$.

zad. 7 Obliczyć pierwiastki:

a) $\sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{(-4 + 4i)^4}}$

c) $\sqrt[3]{(1 + i)^6}$

d) $\sqrt{-3 + 4i}$

e) $\sqrt{-11 + 60i}$