LICZBY ZESPOLONE

1. Dane są liczby zespolone: $z_1 = -2+5i$ oraz $z_2 = 3-4i$.

   Znaleźć: z_1+z_2 , z_2-z_1, $z_1 \cdot z_2$,$\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$.

2. Wykonać działania doprowadzając do postaci $z = a + bi$:

   a) (4-6 i) 0,5 i ; b) $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$; c) $\frac{6}{1+i}$; d) $\frac{-4+6i}{(2+i)(3-2i)}$;

   e) $(3+2i)^3-(3-2i)^3$; f) $\frac{i^{13}-i^{14}}{1+i^{15}}+i^{10}$.

3. Znaleźć równanie kwadratowe o współczynnikach rzeczywistych, jeśli znany jest jeden z pierwiastków równania:

   a) $x_1 = 1-3i$; b) $x_1 = -\frac{1}{2i^3}$; c) $x_1 = \frac{4-2i}{1-i}$.

4. Rozłożyć na iloczyn liczb zespolonych wyrażenia:

   a) $9p^2+q^2$; b) $2+\mathrm{ctg}^2\alpha$; c) $\sqrt{19}+\sqrt[3]{11}$.

5. Na płaszczyźnie zespolonej przedstawić zbiór punktów, spełniających zadane warunki:

   a) Re z = 4 ; b) -1 < Im z < 3 ; c) $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{4}$;

   d) $|z-2i| \le |z+1|$; e) $\frac{|z+2i|}{|z-i|} \ge 2$; f) $|z|^2+2(z+\bar{z})=0$;

   g) $\log_3|z-3i| < 1$; h) $\begin{cases} 2 \le |z-1| \le 3 \\ 0 < \mathrm{Im}\, z < \sqrt{5} \end{cases}$; i) $\mathrm{Re}\frac{2}{\bar{z}+1} < 1$.

6. Znaleźć liczbę sprzężoną z liczbą $z = \frac{1}{4}[\frac{17+31i}{7+i}+\frac{12}{(1+i)^4}]+i$.

7. Przy jakich wartościach rzeczywistych x i y liczby zespolone
   $z_1 = x+1+y^2-3i$ i $z_2 = y-x^2-2xi+y^2i-1-i$
   są liczbami przeciwnymi?

8. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby zespolone:

   a) $4-4\sqrt{3}\,i$; b) $-2+2i$; c) $3i$; d) $1-\sqrt{3}$.

9. Przedstawić w postaci algebraicznej liczby zespolone:

   a) $z = 6(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$; b) $z = -i\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$.

10. Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej wykonać działania:

a) $\dfrac{(\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ)(\cos 41^\circ + i\sin 41^\circ)^2}{\cos 19^\circ + i\sin 19^\circ}$; b) $(6-6i)^2(0{,}25-0{,}25\sqrt{3}\,i)^3$.

11. Korzystając ze wzoru Moivre`a wykonać potęgowanie:

a) $(1{,}5\sqrt{3}+1{,}5i)^5$; b) $(-1+i\sqrt{3})^{10}$; c) $(1{,}5-0{,}5\sqrt{3}\,i)^6$; d) $(1+i)^{1000}$.

12. Przedstawić w postaci algebraicznej i trygonometrycznej liczby zespolone:

a) $\dfrac{(0{,}5\sqrt{2}+0{,}5\sqrt{6}\,i)^3}{(-1{,}5+0{,}5\sqrt{3}\,i)^2\,i}$; b) $\left(\dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12}+i\,\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12}-i\,\sin\frac{13\pi}{12}}\right)^3$

13. Korzystając ze wzoru Moivre`a wyrazić funkcje $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\cos 7\varphi$, $\sin 7\varphi$ przez $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$.

14. Obliczyć pierwiastki:

a) $\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$, b) $\sqrt[3]{-125}$, c) $\sqrt[4]{81}$,

d) $\sqrt[3]{-64i}$, e) $\sqrt[3]{-13{,}5\sqrt{2}-13{,}5\sqrt{2}\,i}$, f) $\sqrt[6]{-64}$.

15. Rozwiązać równania:

a) $z^2-16i=0$; b) $z^3-27=0$; c) $z^3-iz^2+az-ai=0$; d) $z^4+4=0$;
e) $z^4+2z^2+4=0$; f) $z^4-2\sqrt{3}\,z^2+4=0$; g) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$;
h) $z^2-4iz+6(2-5i)=0$.

16. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} z_1+2z_2=1+i \\ 3z_1+iz_2=2-3i \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4iz_1-5z_2=-4+14i \\ 3z_1+2iz_2=7+3i \end{cases}$.

17. Spośród liczb zespolonych spełniających warunek $|z-10|\le 8$, znaleźć taką, której argument ma wartość największą.

18. Znaleźć najmniejszy moduł liczby zespolonej z, spełniającej warunek:
$|z+\sqrt{3}|=|z-i|$.

Odpowiedzi.

1. $1+i$; $5-9i$; $14+23i$; $-\frac{26}{25}+\frac{7}{25}i$; $14-23i$.

2. a) $3+2i$, b) $\sqrt{3}+\sqrt{6}+(\sqrt{2}-3)i$, c) $3-3i$, d) $-\frac{38}{65}+\frac{44}{65}i$, e) $92i$, f) $-1+i$.

3. a) $x^2-2x+10=0$, b) $4x^2+1=0$, c) $x^2-6x+10=0$.

4. a) $(3p+qi)(3p-qi)$, b) $(\sqrt{2}+i\,\mathrm{ctg}\alpha)(\sqrt{2}-i\,\mathrm{ctg}\alpha)$, c) $(\sqrt[4]{19}-i\sqrt[6]{11})(\sqrt[4]{19}+i\sqrt[6]{11})$.

5. a) Ponieważ Re z = x, zbiór poszukiwanych punktów leży na prostej x = 4, równoległej do osi urojonej.

b) Ponieważ Im z = y, to poszukiwany zbiór jest częścią płaszczyzny zespolonej, zawartą między prostymi y = -1 i y = 3, równoległymi do osi rzeczywistej, przy czym punkty prostych nie należą do tego zbioru.

c) Poszukiwanym zbiorem jest zbiór punktów płaszczyzny zespolonej leżących wewnątrz kąta z wierzchołkiem z = 0 między promieniami tworzącymi z osią x kąty $-\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{4}$.

d) Zbiór punktów półpłaszczyzny zespolonej spełniających warunek: $2x+4y\geq 3$.

e) Zbiór punktów płaszczyzny zespolonej spełniających warunek: $x^2+(y-2)^2\leq 4$, bez punktu (0,1) .

f) Okrąg o środku S(-2,0) i promieniu r = 2.

g) Okrąg o środku S(0,3) i promieniu r = 3, z wykluczeniem S .

h) Część pierścienia ograniczonego zbiorem punktów: $\{(x,y): 9\leq (x-1)^2+y^2\leq 16 \ \wedge \ 0<y<\sqrt{5}\}$.

i) $\{(x,y: x^2+y^2>1\}$.

6. $-2i$.

7. $\begin{cases} x=1-\sqrt{5} \\ y=-1+\sqrt{5}\end{cases} \vee \begin{cases} x=1+\sqrt{5} \\ y=-1-\sqrt{5}\end{cases} \vee \begin{cases} x=2+\sqrt{7} \\ y=1+\sqrt{7}\end{cases} \vee \begin{cases} x=2-\sqrt{7} \\ y=1-\sqrt{7}\end{cases}$.

8. a) $z=8\,[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]$, b) $z=2\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$,

c) $z=3\,(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$, d) $z=(\sqrt{3}-1)(\cos\pi+i\sin\pi)$.

9. a) $z=-3+3\sqrt{3}\,i$, b) $z=1+i$.

10. a) $-0,5\sqrt{2}+0,5\sqrt{2}\,i$, b) $9i$.

11. a) $-121,5\sqrt{3}+121,5\,i$, b) $512\,(-1+i\sqrt{3})$; c) -27 ; d) 2^{500} .

12. a) $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}i=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6})$, b) $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

13. $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi-\sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$,
$\cos 7\varphi = \cos^7\varphi-21\cos^5\varphi\sin^2\varphi+35\cos^3\varphi\sin^4\varphi-7\cos\varphi\sin^6\varphi$,
$\sin 7\varphi = 7\cos^6\varphi\sin\varphi-35\cos^4\varphi\sin^3\varphi+21\cos^2\varphi\sin^5\varphi-\sin^7\varphi$.

14. a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, b) $2,5+2,5\sqrt{3}\,i$; -5 ; $2,5-2,5\sqrt{3}\,i$, c) $3, 3i, -3, -3i$,
d) $2\sqrt{3}-2i$; $4i$; $-2\sqrt{3}-2i$; e) $1,5\sqrt{2}-1,5\sqrt{2}\,i$; $3(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12})$;
$3[\cos(-\dfrac{11\pi}{12})+i\sin(-\dfrac{11\pi}{12})]$, f) $\sqrt{3}+i$; $2i$; $-\sqrt{3}+i$; $-\sqrt{3}-i$; $-2i$; $\sqrt{3}-i$.

15. a) $z_1=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$; $z_2=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i$,
b) $z_1=3$; $z_2=-1,5-1,5\sqrt{3}\,i$,

c) $z_1=i$; $z_2=-i\sqrt{a}$; $z_3=i\sqrt{a}$,

d) $z_1=1+i$; $z_2=1-i$; $z_3=-1+i$; $z_4=-1-i$,
e) $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$; $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$; $z_3=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$; $z_4=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$,

f) $z_1=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12})$; $z_2=\sqrt{2}(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12})$;
$z_3=\sqrt{2}[\cos(-\dfrac{\pi}{12})+i\sin(-\dfrac{\pi}{12})]$ $z_4=\sqrt{2}[\cos(-\dfrac{11\pi}{12})+i\sin(-\dfrac{11\pi}{12})]$,
g) $z_1=3-i$; $z_2=-1+2i$,

h) $z_1=3+7i$; $z_2=-3-3i$.

16. a) $\begin{cases} z_1=1-i \\ z_2=i \end{cases}$, b) $\begin{cases} z_1=1+i \\ z_2=-2i \end{cases}$.

17. $z = 3,6 + 4,8\,i$.

18. $z = -4i$