

1. Liczby zespolone

1. Wykonać podane działania. Wskazać część rzeczywistą i urojoną wyniku.

- a) $(1 - 3i) + (4 - 5i)$ [5 - 8i]
- b) $(1 + \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} - 6i)$ [1 + \sqrt{3} + (6 + \sqrt{2})i]
- c) $(\sqrt{7} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3}i)$ [10]
- d) $\frac{2 + 3i}{1 + i}$ [\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i]
- e) $\frac{(1 - i)^2 - i}{(1 + i)^2 + i}$ [-1]
- f) $\frac{z^2}{w}$ dla $z = 5 - 2i$, $w = 3 + 4i$ [\frac{-17 + 144i}{25}]
- g) $\frac{2 \operatorname{Re} w}{z + w}$ dla $z = 5 - 2i$, $w = 3 + 4i$ [\frac{6 + 3i}{17}]
- h) $\frac{z^2}{w + i \operatorname{Re} z}$ dla $z = 5 - 2i$, $w = 3 + 4i$ [\frac{43 - 81i}{10}]

2. Znaleźć liczby rzeczywiste a , b spełniające równania.

- a) $a(2 + 3i) + b(5 - 2i) = -8 + 7i$ [$a = 1$, $b = -2$]
- b) $\frac{a}{2 - 3i} + \frac{b}{3 + 2i} = 1$ [$a = 2$, $b = 3$]

3. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania.

- a) $[2z + (1 + i)\bar{z} = 1 - 3i]$ [2 - 5i]
- b) $z^2 - z + 1 = 0$ [\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}]
- c) $(i - 3)z = 5 + i - z$ [\frac{-9 - 7i}{5}]

4. Obliczyć moduły podanych liczb.

- a) $4i$ [4]
- b) $[12i - 5]$ [13]
- c) $\sqrt{7} + \sqrt{29}i$ [6]
- d) $\frac{1 + 3i}{3 - 4i}$ [\frac{\sqrt{10}}{5}]

5. Obliczyć argumenty podanych liczb.

- a) $-\sqrt{3} - i$ [\frac{7\pi}{6}]

b) $2 - 2i$ $[\frac{7\pi}{4}]$

c) $-4 + 4\sqrt{3}i$ $[\frac{2\pi}{3}]$

6. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających podane warunki.

a) $\operatorname{Re} z = 0$ $[x=0]$

b) $\operatorname{Im} z = -1$ $[y=-1]$

c) $\operatorname{Re} z = z$ $[y=0]$

d) $\operatorname{Im} [(1+2i)z - 3i] < 0$ $[y < -2x+3]$

e) $|i - z| < 3$ $[\text{wnętrze okręgu } o(0,1), r=3]$

f) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$

7. Zapisać podane liczby w postaci trygonometrycznej i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej.

a) $\sqrt{3} + i$ $[2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})]$

b) $-\sqrt{5}$ $[\sqrt{5}(\cos \pi + i \sin \pi)]$

c) $-6 + 6i$ $[6\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})]$

d) $-2i$ $[2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})]$

8. Zapisać podane liczby w postaci algebraicznej.

a) $\sqrt{6}(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$ $[\frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{3\sqrt{2}}{2}]$

b) $3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$ $[3i]$

c) $\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ$ $[-i]$

d) $\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} - i \sin \frac{5\pi}{4})$ $[-1 - i]$

9. Obliczyć wartości podanych wyrażeń. Wynik podać w postaci algebraicznej.

a) $(1+i)^7$ $[8 - 8i]$

b) $(\sqrt{3} - i)^{32}$ $[2^{31}(i\sqrt{3} - 1)]$

c) $(-2 + 2i)^8$ $[2^{12}]$

10. Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki.

a) $\sqrt{-2i}$ $[-1 + i, 1 - i]$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$ $[\sqrt{3} + i, -1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3}i]$

c) $\sqrt[6]{1}$ $[1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i]$

11. Znaleźć pierwiastki podanych równań kwadratowych.

a) $z^2 + 2iz + 3 = 0$

$[-3i, i]$

b) $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$

$[-1+2i, 3-i]$