Przewodnik do ćwiczeń

Lista numer 1

Pochodne cząstkowe funkcji złożonej

Twierdzenie (o pochodnych cząstkowych funkcji złożonej)

Jeżeli funkcja

$$z = f(u, v)$$

ma pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial u} \;\; i \;\; \frac{\partial f}{\partial v}$$

ciągłe w obszarze D, a ponadto funkcje

$$u = u(x, y) \quad i \quad v = v(x, y)$$

mają pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \;\; \frac{\partial u}{\partial y}, \;\; \frac{\partial v}{\partial x}, \;\; \frac{\partial v}{\partial y}$$

w obszarze Δ oraz $(u, v) \in D$ gdy (x,y) $\in \Delta$ to funkcja złożona dwóch zmiennych x i y

$$z = f[u(x, y), v(x, y)] = F(x, y)$$

ma pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial z}{\partial x} \;\; i \;\; \frac{\partial z}{\partial y}$$

w każdym punkcie obszaru Δ, przy czym

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Następujący schemat ułatwia zapamiętanie wzorów (1)

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[rr, "\frac{\partial u}{\partial x}"] \arrow[ddrr, "\frac{\partial u}{\partial y}" near start] & & x \\
z = f(u, v) \arrow[ur, "\frac{\partial f}{\partial u}"] \arrow[dr, "\frac{\partial f}{\partial v}"'] & & & \\
 & v \arrow[rr, "\frac{\partial v}{\partial y}"'] \arrow[uurr, "\frac{\partial v}{\partial x}" near start] & & y
\end{tikzcd}$$

w szczególnym przypadku gdy

(1) $z = f(u,v)$ gdzie $u = u(t), \quad v = v(t)$

$z = f[u(t), \ v(t)] = F(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \ \frac{\partial v}{\partial t}$$

(2) $z = f(u,v)$ gdzie $u = x, \quad v = v(x)$

$z = f[x, \ v(x)] = F(x)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \ \frac{\partial v}{\partial x}$$

Zadanie nr 1

Pokazać, że funkcja

$$z = arctg\frac{u}{v}$$

gdzie $u = x + y, \quad v = x - y$

spełnia równanie

$$\frac{dz}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$$

Zadanie 2

Pokazać, że funkcja $z = \varphi(x^2 + y^2)$

gdzie $\varphi(u)$ funkcja różniczkowalna spełnia równanie:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Zadanie 3

Pokazać, że funkcja $u = sinx + F(siny - sinx)$ spełnia równanie:

$$\frac{du}{dy}cosx + \frac{\partial u}{\partial x}cosy = cosxcosy$$

dla dowolnej funkcji różniczkowalnej F.

Zadanie 4

$$z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$$

Pokazać, że

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x^2}$$

dla dowolnej funkcji różniczkowalnej f

Zadanie 5

Oblicz pochodne cząstkowe $\frac{dz}{dx}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ uwikłanej $z = f(x, y)$ opisanej wzorem

(a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$

(b) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$

(c) $z^3 + 3xyz = 25$

(d) $e^z - xyz = 0$

Zadanie 6

$z = \ln{(e^x + e^y)}$. Pokazać, że

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

Zadanie 7

$u = e^x(xcosy - ysiny)$. Pokazać, że

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Zadanie 8

$u = \ln{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}$

Pokazać, że

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Zadanie 9

$z = f(u, v), \quad u = x + y, \quad v = x - y.$ Pokazać, że

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

Zadanie 10

$z = xu(x + y) + yv(x + y).$ Pokazać, że

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Zadanie 11

Przekształcić wyrażenia różniczkowe, wprowadzając nowe zmienne niezależne u i v

(a) $$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad u = xy, \qquad v = \frac{x}{y}$$

(b) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad u = 2x + y, \quad v = u - x$$

(c) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad u = x + ay, \qquad v = x - ay$$