Przewodnik do ćwiczeń
Lista numer 2
Równania różniczkowe cząstkowe

Definicja 1

Równaniem różniczkowym cząstkowym nazywamy równanie różniczkowe, w którym występuje funkcja niewiadoma dwóch lub więcej zmiennych oraz jej pochodne cząstkowe.

Definicja 2

Rzędem równania różniczkowego cząstkowego nazywamy najwyższy rząd pochodnej funkcji niewiadomej występującej w tym równaniu

Będziemy rozważać równania co najwyżej rzędu drugiego, z funkcją niewiadomą $u = u(x, y)$ dwóch zmiennych x i y to jest równaniami postaci

(1) $$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

Definicja 3

Rozwiązaniem lub *całką* równania (1) nazywamy każdą funkcję

$$u = u(x, y)$$

dwóch zmiennych niezależnych x i y mającą drugie pochodne cząstkowe w pierwszym d2u wymiarowym obszarze D, która po podstawieniu wraz ze swymi pochodnymi do wyrażenia F w zależności (1) spowoduje, że wyrażenie F będzie tożsamościowo równe zeru w obszarze D.

Definicja 4

Zagadnieniem o warunku początkowym lub *zagadnieniem Cauchy'ego* nazywamy problem poszukiwania takiego rozwiązania $u = u(x, y)$ równania (1), które dla pewnej wartości $x=a$ jest równe z góry zadanej funkcji $\psi(y)$ jednej zmiennej y+*zn*

$$u(a, y) = \psi(y)$$

albo

dla pewnej wartości $y = b$ jest równe z góry zadanej funkcji $\varphi(x)$ jednej zmiennej x tzn.

$$u(x, b) = \varphi(x)$$

Będziemy teraz wyznaczać rozwiązania ogólne $u=u(x, y)$, gdzie funkcja u jest klasy c^2, pewnych równań różniczkowych cząstkowych.

Przykład 1

(a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(y)$$

$$u = g(y)x + G(y)$$

(b)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)$$

$$u = f(x)y + F(x)$$

(c)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)$$

$$u = \int_0^x f(t)dt = F(x) + G(y)$$

(d)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g(y)$$

$$u = \int_0^x g(t)dt = G(y) + F(x)$$

(e)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(y)$$

$$\frac{du}{dx} = u$$

$$\frac{du}{u} = dx$$

$$\ln|u| = x + \psi(y)$$

$$u = \pm e^{\psi(y)} e^x$$

$$u = G(y) \cdot e^x$$

(f)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u$$

$$\frac{du}{dy} = u$$

$$\frac{du}{u} = dy$$

$$\ln|u| = y + \varphi(x)$$

$$u = \pm e^{\varphi(x)} e^{y}$$

$$u = F(x) \cdot e^{y}$$

Przykład 2

(a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p(x)u = f(x)$$

(1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} - u = e^{x}$$

(1')

$$\frac{du}{dx} - u = e^{x}$$

(1'')

$$\frac{du}{dx} - u = 0$$

$$\frac{du}{dx} = u$$

$$\frac{du}{u} = dx$$

$$u = G(y)e^{x}$$

uzmienniony stałą *G(y)*

(2)

$$u = G(x,y)e^{x}$$

(3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} e^x + G(x,y)e^x$$

(2) i (3) wstawiamy do (1)

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} e^x + G(x,y)e^x - G(x,y)e^x = e^x$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} e^x = e^x$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = 1$$

$$G(x,y) = \int_0^x 1dt + H(y)$$

(4)

$$G(x,y) = x + H(y)$$

(4) wstawiamy do (2)

$$u = (x + H(y))e^x$$

$$u = xe^x + H(y)e^x$$

(b)

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q(y)u = g(y)$$

(1)

$$\frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 3$$

(1')

$$\frac{d\psi}{dy} + 2u = 3$$

(1'')

$$\frac{du}{dy} = -2u$$

$$\frac{du}{u} = -2dy$$

$$\ln|u| = -2y + \varphi(x)$$

$$\mathrm{u} = \pm e^{u(x)}e^{-2y}$$

$$u = F(x)e^{-2y}$$

uzmienniamy stałą *F(x)*

(2)

$$u = F(x,y)e^{-2y}$$

(3)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}e^{y} - 2F(x,y)e^{-2y}$$

(2) i (3) wstawiamy do (1)

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}e^{-2y} - 2F(x,y)e^{-2y} + 2F(x,y)e^{-2x} = 3$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}e^{-2y} = 3$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3e^{2y}$$

$$F(x,y) = \int_0^y 3e^{2t}dt + H(x)$$

(4)

$$F(x,y) = \frac{3}{2}e^{2y} + H(x)$$

(4) wstawiamy do (2)

$$u = (\frac{3}{2}e^{2t} + H(x))e^{-2y}$$

$$u = \frac{3}{2} + \frac{H(x)}{e^{2y}}$$

Zadanie 1

Rozwiąż następujące równania różniczkowe

(a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2u = 4x$$

(b)

$$\frac{\partial u}{\partial y} + 2\mathrm{yu} = \mathrm{y}e^{-x^2}$$

(c)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{u} = \mathrm{cosx}$$

(d)

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \mathrm{utgx} = \frac{1}{cosx}$$

(e)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{x}=\frac{e^{x}}{x}$$

Przykład 3

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x)$$

$$u=\int_{a}^{x} f(t)dt+G(y)$$

$$u=F(x)+G(y)$$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=G(y)$$

$$\mathrm{u}=\mathrm{xG(y)}+\mathrm{H(y)}$$

(c)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=F(x)$$

$$u=yF(x)+H(x)$$

Przykład 4

Wyznacz rozwiązanie $\mathrm{u}=\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ równania

(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

spełniające następujące warunki początkowe:

$$u(x,o) = 3x^2; \quad u(o,y) = 4y^3$$

Rozwiązanie

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 2xu\right) = 0$$

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\mathrm{xu} = \varphi(\mathrm{x})$$

gdzie $\varphi(x)$ jest dowolną funkcją całkowalną jednej zmiennej x. Równanie (2) rozwiązujemy metodą uzmienniania stałej postępując jak z równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym.

(3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\mathrm{xu} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\mathrm{xu}$$

$$\frac{\partial u}{\partial} = 2x\partial x$$

$$\frac{du}{d} = 2xdx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 2xdx$$

$$\ln|u| = x^2 + \psi(y)$$

$$\mathrm{u} = \pm e^{\psi(y)} e^{x^2}$$

$$\mathrm{u=A(y)}e^{x^2}$$

Uzmienniamy stałą zastępując funkcję *A(y)* jednej zmiennej *y* funkcją *A(x,y)* dwóch zmiennych *x* i *y*

(4)

$$u = A(x,y)e^{x^2}$$

(5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial A(x,y)}{\partial x} e^{x^2} + \mathrm{A}(x,y) \cdot 2\mathrm{x}e^{x^2}$$

(4) i (5) wstawiamy do równania (2)

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial x} e^{x^2} + 2xA(x,y)e^{x^2} - 2xA(x,y)e^{x^2} = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial x} = \varphi(x)e^{-x^2}$$

(6)

$$A(x,y) = \int_0^x \varphi(t)e^{-t^2}dt = F(x) + G(y)$$

(6) wstawiamy do (4)

$$u = (F(x) + G(y)e^{x^2}$$

Zatem funkcja

(7)

$$u = u(x,y) = (F(x) + G(y))e^{x^2}$$

jest całką równania (1)

Uwzględniając warunki początkowe $u(x,o) = 3x^2,\ \ u(o,y) = 4y^3$

mamy

$$\begin{cases} (F(x) + G(o))e^{x^2} = 3x^2 \\ F(o) + G(y) = 4y^3 \end{cases}$$

z równania $F(o) + G(y) = 4y^3$

mamy $F(o) + G(o) = 0.$ Zatem $G(o) = -F(o)$

stąd

$$\begin{cases} F(x) - F(o) = 3x^2e^{-x^2} \\ F(o) + G(y) = 4y^3 \end{cases}$$

(8)

$$F(x) + G(y) = 3x^2e^{-x^2} + 4y^2$$

wstawiając (8) do (7) otrzymujemy rozwiązanie

$$u = u(x,y) = \left(3x^2e^{-x^2} + 4y^3\right)e^{x^2}$$

$$u = u(x,y) = 3x^2 + 4y^3e^{x^2}$$

Zadanie

Rozwiąż następujące równania

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3(x^2 + y^2) = 0$$

Odp. $u = u(x,y) = x^3 y + x y^3 + F(x) + G(y)$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Odp. $u = u(x,y) = B(x)e^{y^2} + A(y)$

(c)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4x^3 = 0$$

$u = u(x,y) = -x^4 y + F(x) + G(y)$

(d)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Odp. $u = u(x,y) = A(y)e^{-x} + B(x)$

(e)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - y = 0$$

Odp. $u = u(x,y) = A(y)e^{x} + B(y) - (x+1)y$

(f)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Odp. $u = u(x,y) = A(y) + B(x - y)$