Lista numer 3

Definicja 1

Równaniem różniczkowym cząstkowym liniowym rzędu drugiego o niewiadomej funkcji *u=u(x, y)* dwóch zmiennych niezależnych *x* i *y* nazywamy równanie postaci:

(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + d = 0$$

gdzie *A, B, C, a, b, c, d* są danymi funkcjami dwóch zmiennych x i y o ciągłych pochodnych w pewnym obszarze płaskim D.

$$\delta = B^2 - 4AC$$

Jeżeli

(1.1.)

$\delta > 0$ to (1) nazywamy równaniem *hiperbolicznym*

(1.2.)

$\delta = 0$ to (1) nazywamy równaniem *parabolicznym*

(1.3.)

$\delta < 0$ to (1) nazywamy równaniem *eliptycznym*

Definicja 2

Charakterystykami równania (1) nazywamy krzywe całkowe równań różniczkowych zwyczajnych

(2.1.)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{B - \sqrt{\delta}}{2A}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{\delta}}{2A}$$

gdy $A \neq 0$

(2.2.)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{B - \sqrt{\delta}}{2C}; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{B - \sqrt{\delta}}{2C}$$

gdy C$\neq 0$

Niech

$f(x, y) = C_1 \quad i \quad g(x, y) = C_2$

będą całkami pierwszymi równań (2.1.) albo (2.2.)

Przypadek 1

Jeżeli równanie (1) jest typu hiperbolicznego ($\delta > 0$) to przyjmując nowe zmienne ξ i η w sposób

$$\xi = f(x, y), \quad \eta = g(x, y)$$

sprowadzamy równanie (1) do postaci kanonicznej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + F\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right) = 0$$

Przyjmując nowe zmienne

$$\xi = f(x, y) + g(x, y); \quad \eta = f(x, y) - g(x, y)$$

sprowadzamy równanie (1) do postaci kanonicznej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right) = 0$$

Przypadek 2

Jeżeli równanie (1) jest typu parabolicznego ($\delta = 0$) to przyjmując nowe zmienne ξ i η w sposób

$$\xi = f(x, y), \quad \eta = x$$

sprowadzamy równanie (1) do postaci kanonicznej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right) = 0$$

Przypadek 3

Jeżeli równanie (1) jest typu eliptycznego ($\delta < 0$) to

$$f(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$$

$$g(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y)$$

Przyjmując nowe zmienne ξ i η w sposób

$$\xi = \alpha(x, y), \quad \eta = \beta(x, y)$$

sprowadzamy równanie do postaci kanonicznej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right) = 0$$

Przykłady równań różniczkowych cząstkowych liniowych mających duże zastosowanie np. w mechanice czy fizyce to

(1)

Równanie Laplace'a

Równanie Laplace'a w przestrzeni

(1')

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

z funkcją niewiadomą u=u(x, y, z) trzech zmiennych x, y, z

Rozwiązaniem równania (1') jest funkcja

$$u=c_1+\frac{c_2}{r}$$

gdzie c_1 i c_2 to stałe rzeczywiste, zaś

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

w dowolnym obszarze $v \in R^3$ nie zawierającym punktu $P_0=(x_o, y_o, z_0)$

w szczególnym przypadku funkcja

$$u=\frac{1}{r}$$

którą nazywamy *potencjałem newtonowskim punktu* $P_0=(x_o, y_o, z_0)$

Równanie Laplace'a na płaszczyźnie

(1'')

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

z funkcją niewiadomą

u=u(x, y)

dwóch zmiennych *x* i *y*

Rozwiązaniem równania (1'') jest funkcja

$$u(x,y)=\ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

gdzie

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

zwana *potencjałem logarytmicznym punktu* $P_0=(x_o, y_o,)$ w każdym obszarze $D \in R^2$ nie zawierającym punktu P_0.

Równanie strony

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

gdzie

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

T – naprężenie struny

ρ - gęstość liniowa strony jednorodnej z funkcją niewiadomą u=u(x, t)

dwóch zmiennych x i t

Dla struny dwustronnie nieograniczonej rozwiązaniem równania (2) jest funkcja

(2'')

$$u(x,t) = F(x - at) + G(x + at)$$

w zbiorze

$$D = \{(x,t) : x\epsilon(-\infty, +\infty) \qquad t \geq 0\}$$

gdzie F i G są to dowolne funkcje klasy C^2 w przedziale $(-\infty, +\infty)$

Funkcja (2') spełniająca warunki początkowe

$$u(x,0) = f(x) \;\; i \;\; \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x)$$

gdzie f(x) i $\varphi(x)$ są danymi funkcjami odpowiednio klasy C^1 i C^2 w przedziale $(-\infty, +\infty)$,

ma postać:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(z)dz$$

wzór (2') nosi nazwę wzoru d'Alamberta

Zadanie

Rozwiązać równanie różniczkowe

(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

przy warunkach początkowych

$$u(\qquad\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y}$$

Rozwiązanie

Obliczamy

$$\delta = 1^2 + 4 \cdot 1(-2) = 9$$

Zatem równanie (1) jest typu hiperbolicznego

Równania charakterytyki :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-1-3}{2}=-2; \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-1+3}{2}=1$$

$$dy=-2dx \qquad dy=dx$$

$$y=-2x+c_1 \qquad y=x+c_2$$

charakterystyki

$$y+2x=c_1 \qquad y-x=c_2$$

Równanie (1) sprowadzamy do postaci kanonicznej przechodząc do zmiennych $\xi\ i\ \eta$ określonych wzorami:

$$\xi=y+2x; \quad \eta=y-x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=2\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(2\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi}-\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \eta}\right)=2\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \eta}\right)=2\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)$$

$$-\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=2\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Obliczone pochodne wstawiamy do równania (1)

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+$$

$$-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

$$-9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$$

(2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$$

Funkcja $u = u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ jest całką ogólną równania (2)

Funkcja $u = u(x, y) = F(y + 2x) + G(y - x)$ jest całką ogólną równania (1)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = F'(y + 2x) + G'(y - x)$$

Uwzględniając warunki początkowe

$$u = u(x, 2x) = 0 \qquad \frac{\partial u(x,2x)}{\partial y} = 3x^2$$

Mamy

$$u(x, 2x) = F(2x + 2x) + G(2x - x) = F(4x) + G(x) = 0$$

$$\frac{\partial u(x,2x)}{\partial y} = F'(2x + 2x) + G'(2x - x) = F'(4x) + G'(x) = 3x^2$$

Zatem

$$F(4x) + G(x) = 0$$

$$F'(4x) + G'(x) = 3x^2$$

Całkując drugie równanie względem x mamy

(3)

$$F(4x) + G(x) = 0$$

$$\frac{1}{4}F(4x) + G(x) = 3x^3 + c$$

Rozwiązując układ (3) otrzymujemy

$$F(4x) = -\frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{3}c$$

$$F(x) = F\left[4 \cdot \left(\frac{1}{4}x\right)\right] = -\frac{4}{3}(\frac{1}{4}x)^3 - \frac{4}{3}c = -\frac{1}{48}x^3 - \frac{4}{3}c$$

$$G(x) = \frac{1}{48}x^3 + \frac{4}{3}c$$

Stąd szukana funkcja ma postać

$$u = u(x, y) = F(y + 2x) + G(y - x) = -\frac{1}{48}(y + 2x)^3 + \frac{1}{48}(y - x)^3$$

Zadanie 1

Określa typ i sprowadź do postaci kanonicznej równania:

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

(c)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(d)

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(e)

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(f)

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(g)

$$sin^2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ysinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Zadanie 2

Znajdź rozwiązanie ogólne równań:

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

odp. $u(x,y) = F(3x-y) + G(2x-y)$

(b)

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

odp. $u(x,y) = F(x+y) + G(3x+2y)$

(c)

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 1 = 0$$

odp. $u(x,y) = xF(y-x) + G(y-x) + \frac{1}{8}x^2$

(d)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

odp. $u(x,y) = F(y) + G(x-y)$

(e)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - y = 0$$

odp. $u(x,y) = F(y)e^x + 6(y) - (x+1)y$

(f)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - y = 0$$

odp. $u(x,y) = F(y)e^{-x} + G(x)$

(g)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4x^3 = 0$$

odp. $u(x,y) = -x^4 y + F(y) + G(y)$

(h)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3(x^2 + y^2) = 0$$

odp. $u(x,y) = x^3 y + xy^3 + F(x) + G(y)$

Zadanie 3

Rozwiązać następujące równania różniczkowe przy zadanych warunkach początkowych

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 \quad u(x,o) = x^5,\ \ u(o,y) = y^2$$

odp. $u(x,y) = x^5 + xy + y^2$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad u(x,o) = 5x^4 + x^2,\ \ u(o,y) = 3y^3$$

odp. $u(x,y) = 5x^4 + x^2 + 3y^3 e^{x^3}$

(c)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2xsiny = 0 \quad u(x,o) = x^2, \;\; u(o,y) = siny$$

odp. $x^2(2 - cosy) + siny$

(d)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad u(x,o) = x^5, \;\; u(o,y) = y^3$$

odp. $u(x,y) = x^5 + x^3 + (y - x)^3$

(e)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad u(x,o) = x^3, \;\; u(o,y) = y^7$$

odp. $u(x,y) = e^x y^7 + x^3$

(f)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad u(x,o) = 3x^3, \;\; \frac{\partial u(x,o)}{\partial y} = 0$$

odp. $u(x,y) = 3x^2 + y^2$