Przewodnik do ćwiczeń

Lista numer 7

Szereg trygonometryczny Fouriera

Dany jest ciąg funkcyjny $\{\varphi_n(x)\}$ taki , że :

(1) $\varphi_0(x) = 1$ oraz $\varphi_{2n-1}(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$ i $\varphi_{2n}(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$; $n = 1, 2, \ldots$
gdzie l jest pewna liczbą dodatnią.

Niech $f(x)$ będzie pewną funkcją całkowalną w przedziale $< -l \ , \ l >$.
Liczby :

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

nazywamy *współczynnikami Fouriera* funkcji $f(x)$ względem układu (1) .

Szereg

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

nazywamy *szeregiem trygonometrycznym Fouriera* funkcji $f(x)$ w przedziale

$< -l \ , \ l >$ i zapisujemy :

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) .$$

Oznaczmy przez $f(x_o -)$ granicę lewostronną funkcji $f(x)$ punkcie x_0 ,
a przez $f(x_o +)$ granicę prawostronną .

Definicja

Mówimy , że funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $< -l \ , \ l >$ *warunki Dirichleta* jeżeli :

(1) $f(x)$ jest przedziałami monotoniczna w przedziale $< -l \ , \ l >$

(2) $f(x)$ jest ciągła w przedziale $(-l \; , \; l)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów nieciągłości , przy czym w każdym punkcie nieciągłości x_0 istnieją granice jednostronne właściwe oraz spełniony jest warunek :

$$f(x_o) = \frac{1}{2}\left[f(x_0 -) + f(x_0 +) \right]$$

(3) w końcach przedziału $< -l \; , \; l >$ spełnione są równości :

$$f(-l) = f(l) = \frac{1}{2}\left[f(-l +) + f(l -) \right] \bullet$$

Twierdzenie (Dirichleta)

Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $< -l \; , \; l >$ *warunki Dirichleta to*

jest w tym przedziale *rozwijalna w szereg trygonometryczny Fouriera* to znaczy

$$(*) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

dla każdego $x \in \; < -l \; , \; l >$. Ponadto jeżeli funkcja $f(x)$ jest funkcją

okresową o okresie $2l$ to równość $(*)$ jest prawdziwa dla każdego $x \in D_f$ ●

Uwaga

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest parzysta to $b_n = 0 \; ; \; n = 1, 2, ...$ i wtedy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \; .$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieparzysta to
$a_0 = 0 \quad i \quad a_n = 0 \; ; \; n = 1, 2, ...$ i wtedy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \; .$$

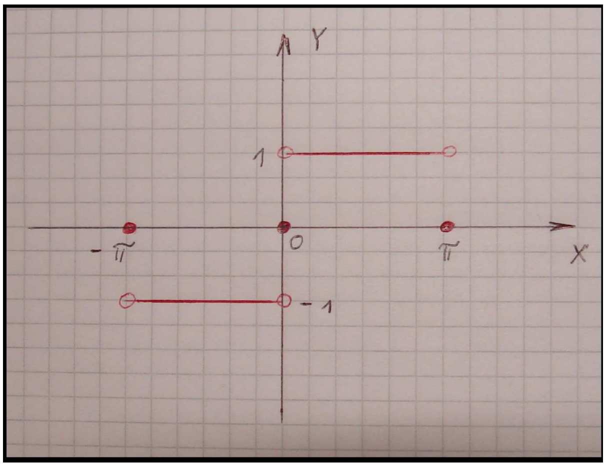
Zadanie 1

Rozwiń w szereg trygonometryczny Fouriera funkcję :

$$f(x)=\begin{cases} -1 & dla \quad x\in(-\pi \;,\; 0) \\ 0 & dla \quad x=\; -\pi \;,\; 0 \;,\; \pi \\ 1 & dla \quad x\in(0 \;,\; \pi) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wykres funkcji f wygląda następująco :



Z wykresu funkcji możemy odczytać , że funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale domkniętym $<-\pi \;,\; \pi>$ oraz , że f jest funkcją nieparzystą.

Zatem $a_0=0$ i $a_n=0$ dla $n=1,2,\ldots$

Obliczamy współczynniki b_n , $n=1,2,\ldots$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = \left[\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{-2}{n\pi}\cos(n\pi)\right] - \left[\frac{-2}{n\pi}\cos 0\right] = \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right).$$

Stąd

$$b_n = \begin{cases} 0 & dla \quad n \quad parzysyych \\ \dfrac{4}{n\pi} & dla \quad n \quad nieparzystych \end{cases}$$

Ponieważ każdą liczbę nieparzysta można zapisać w postaci :

$2n-1$, $n=1,2,\ldots$

to

$$b_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} \quad , \qquad n = 1 , 2 , ...$$

Zatem

$$(*) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin(2n-1)x \; .$$

Wzór $(*)$ jest prawdziwy dla każdego $x \in \; < -\pi \; , \; \pi >$ a wiec również dla $x = \frac{\pi}{2}$. Ponieważ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ zatem

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}(-1)^{n+1} \; .$$

Stąd

$$(**) \qquad \pi = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\right) .$$

Wzór $(**)$ był pierwszym historii matematyki rozwinięciem liczby π w szereg liczbowy .

Zadanie 2

Rozwiń w szereg trygonometryczny Fouriera następujące funkcje :

(a) $f(x) = |x|$ w przedziale $< -\pi \; , \; \pi >$

(b) $f(x) = x$ w przedziale $(-1 \; , \; 1)$

(c) $f(x) = x^2$ w przedziale $< -1 \; , \; 1 >$