

Macierze i wyznaczniki

zad. 1 Obliczyć iloczyn macierzy A i B:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zad. 2 Obliczyć:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -3 \\ 5 & 7 & 2 & -6 & 7 \\ 2 & -3 & 2 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

zad. 3 Rozwiązać równania i nierówność:

$$\text{a) } \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{bmatrix} = 0 \quad \text{b) } \det \begin{bmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 3x-5 & x-2 & x-3 \\ 2x+1 & x-1 & x+2 \\ 3x+2 & x-1 & 2x+3 \end{vmatrix} > 0$$

zad. 4 Znaleźć macierze odwrotne do danych macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 2+i \\ i & -3 & 2+3i \\ 2-i & 4-i & -2i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

zad. 5 Wyznaczyć rzędy macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ -5 & 9 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ -5 & 7 & 12 & 7 \\ 3 & -6 & -9 & 2 \\ -1 & 13 & 14 & -5 \\ 2 & -3 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 2 & -8 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

zad. 6 Korzystając z zasady indukcji matematycznej udowodnić podane wzory:

$$\text{a) } W_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

$$\text{b) } W_n = \begin{vmatrix} 2 \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} = \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x}$$

zad. 7 Obliczyć następujące wyznaczniki stopnia $n, n \geq 2$ (wyprowadzone wzory udowodnić indukcyjnie).

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

zad. 8 Wyprowadzić wzory na A^n i udowodnić je indukcyjnie.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{d)} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zad. 9 Rozwiązać podane równania macierzowe i układy równań macierzowych:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} X = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} X - iX^T = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 6-2i & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e)} X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{f)} \begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$