2. Macierze i wyznaczniki

Dane są macierze: $A=\begin{bmatrix}3&1&2\\-1&0&3\\4&2&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&0&1\\-1&2&2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}$

1. Obliczyć:

a) $(3A+B)\cdot C\cdot D+C$

b) $D\cdot C^T+(C\cdot D)^T$

c) D^2

d) $\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-2&2\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}1&-2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^k$

2. Rozwiązać równania macierzowe:

a) $X\cdot\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}2&5\\`1&3\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}4&-6\\2&1\end{bmatrix}$

c) $X^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

d) $3\left(\begin{bmatrix}1&2\\-i&0\end{bmatrix}+X\right)+\begin{bmatrix}-1&0\\i&4\end{bmatrix}=X$

e) $X\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\3&5&8\end{bmatrix}$

f) $3X\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$

g) $3X\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$

3. Obliczyć wartość wyznaczników:

a) $\begin{vmatrix}1-\sqrt{2}&\sqrt{5}-2\\\sqrt{5}+2&1+\sqrt{2}\end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix}\cos\alpha+i\sin\alpha&1\\1&\cos\alpha-i\sin\alpha\end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix}4+7i&2+4i&4-3i\\2+7i&4i&3-4i\\3+6i&1+3i&4-4i\end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix}5&3&4\\1&-2&0\\-3&6&-1\end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix}1&0&1&1\\2&-1&2&1\\3&2&-1&0\\0&1&0&3\end{vmatrix}$

Dane są wyznaczniki: a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

4. Napisać rozwinięcie Laplace'a podanych wyznaczników względem wybranego wiersza (lub kolumny).

5. Stosując operacje elementarne na wierszach (lub kolumnach) podanych wyznaczników uzyskać największą liczbę zer w danym wierszu (lub kolumnie).

6. Wyznaczyć macierz odwrotną do danej:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

7. Rozwiązać równania macierzowe (metodą macierzy odwrotnej):

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ b) $X\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $X\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

e) $X\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

g) $3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot X$ h) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = 2\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$