Rozwiązania okresowe równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach.

Stanisław Ewert-Krzemieniewski
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny
Studium Matematyki

May 10, 2010

Dane jest równanie różniczkowe

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x), \tag{1}$$

gdzie p_1, p_2 sa stałymi, a f jest funkcją okresową o okresie 2π. Jeżeli

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{2}$$

to rozwiązania szukamy w postaci

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx. \tag{3}$$

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu szeregu (3) i podstawieniu otrzymanych równań oraz (2) do (1), porównując współczynniki przy funkcjach $\cos nx$, $\sin nx$, $n \in N$ oraz wyrazy wolne, otrzymujemy układ

$$\begin{aligned} -n^2 A_n + p_1 n B_n + p_2 A_n &= a_n, \\ -n^2 B_n - p_1 n A_n + p_2 B_n &= b_n, \\ p_2 A_0 &= a_0, \end{aligned} \tag{4}$$

skąd

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(p_2 - n^2) a_n - p_1 n b_n}{(p_2 - n^2)^2 + p_1^2 n^2}, \\ B_n &= \frac{(p_2 - n^2) b_n + p_1 n a_n}{(p_2 - n^2)^2 + p_1^2 n^2}, \\ A_0 &= \frac{a_0}{p_2}, \end{aligned} \tag{5}$$

o ile p_2 jest różne od kwadratu pewnej liczby naturalnej lub $p_1 \neq 0$.

Jeżeli $a_0 \neq 0$, to warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania okresowego jest $p_2 \neq 0$.

1 Przykłady

1. $y" + 9y = \sum\limits_{\substack{n=1\\n\neq 3}}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

   Rozwiązanie. $p_1 = 0$, $p_2 = 3^2$, $a_0 = a_3 = 0$, $b_n = 0$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ dla $n \neq 3$. Dla $n = 3$ układ (4) jest spełniony przez dowolne stałe A_3, B_3. Dla $n \neq 3$, z wzorów (5) znajdujemy: $A_0 = 0$, $A_n = \frac{1}{n^2(9-n^2)}$, $B_n = 0$.

   Odpowiedź: $y(x) = A_3 \cos 3x + B_3 \sin 3x + \sum\limits_{\substack{n=1\\n\neq 3}}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(9-n^2)}$, gdzie $A_3, B_3 \in R$.

2. $y" + 9y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

   Rozwiązanie. $p_1 = 0$, $p_2 = 3^2$, $a_0 = 0$, $b_n = 0$, $a_n = \frac{1}{n^2}$. Dla $n = 3$ układ (4) jest sprzeczny.

   Odpowiedź: Równanie nie posiada rozwiązania okresowego.

3. $y" - 9y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

   Rozwiązanie: $p_1 = 0$, $p_2 = -9 \notin N$, $a_0 = 0$, $b_n = 0$, $a_n = \frac{1}{n^2}$. W (5) mianowniki są różne od zera. Rozwiązując (5) znajdujemy: $A_0 = 0$, $A_n = \frac{1}{n^2(9-n^2)}$, $B_n = 0$.

   Odpowiedź: $y(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(9+n^2)}$.

4. Znadź szereg trygonometryczny Fouriera funkcji $f(x) = \sin 4x \cos 6x$.

   Rozwiązanie. Stosujemy wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy dwóch kątów:

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \cos a \sin b + \cos b \sin a, \\ \sin(a-b) &= \cos b \sin a - \cos a \sin b \end{aligned}$$

   Odejmując stronami dostajemy $\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$. Kładąc $b = 4x$, $a = 6x$ otrzymujemy

$$\sin 4x \cos 6x = \frac{1}{2}\left(\sin 10x - \sin 2x\right).$$

   Stąd: $b_2 = -\frac{1}{2}$, $b_{10} = \frac{1}{2}$, pozostałe współczynniki szeregu Fouriera sa równe zero.

2 Zadania

1. $y'' + 3y = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx + \sin nx}{n^3}$.

2. $y'' + y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

3. $y'' + y = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

4. $y'' + y' + 4y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

5. $y'' + y' + 4y = \sin x + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

6. $y'' + 4y = \sin x + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

7. $y'' + y = \cos x \cos 2x$.

8. $y'' + 9y = 2\cos x \cos 4x$.

9. $y'' + 25y = 2\cos x \cos 4x$.

10. $y'' + 4y = 2\cos x \cos 4x$.

11. $y'' + 5y = 2\cos x \cos 4x$.

12. $y'' + y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

13. $y'' + 4y = \cos^2 x$.

14. $y'' - 4y' + 4y = \pi^2 - x^2$, $-\pi < x < \pi$.

15. $y'' - 4y = |\cos \pi x|$.

16. $y'' - 4y' + 4y = \arcsin(\sin x)$.

17. $y'' + 9y = \sin^3 x$.

3 Odpowiedzi

1. $y = \frac{1}{3} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx + \sin nx}{n^3(n^2-3)}$.

2. Brak rozwiązania okresowego.

3. $y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(n^2-1)}$.

4. $y = -\frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{8}\cos 2x + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{-n\cos nx + (4-n^2)\sin nx}{n^2[(4-n^2)^2+n^2]}$.

5. $y = -\frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{-n\cos nx + (4-n^2)\sin nx}{n^2[(4-n^2)^2+n^2]}$.

6. $y=-\frac{1}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{-n\cos nx+(4-n^2)\sin nx}{n^2[(4-n^2)^2+n^2]}$, C_1, C_2 stałe dowolne.

7. Brak rozwiązania okresowego.

8. Brak rozwiązania okresowego.

9. Brak rozwiązania okresowego.

10. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{5}\cos 3x-\frac{1}{21}\cos 3x$, C_1, C_2 stałe dowolne.

11. $y=-\frac{1}{4}\cos 3x-\frac{1}{20}\cos 5x$.

12. $y=C-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+n\sin nx}{n^3(n^2+1)}$.

13. Brak rozwiązania okresowego.

14. $y=\frac{\pi^2}{6}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n^2-4)\cos nx+4n\sin nx}{n^2(n^2+4)^2}$.

15. $y=-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n\pi x}{(n^2\pi^2+1)(4n^2-1)}$.

16. $y=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n\cos nx+(4-n^2)\sin nx}{(2n-1)^2(n^2+4)^2}$.

17. Brak rozwiązania okresowego.