Pochodna funkcji

zad. 1 Obliczyć pochodne funkcji korzystając z definicji:

a) $y = x^3 + 2x - 1$ **b)** $y = \cos(3x-1)$ **c)** $y = 5^{2x-7}$

zad. 2 Obliczyć, (jeśli istnieje):

a) $f'(2)$ dla $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{dla} \quad x \le 2 \\ x^2 - 7x + 8 & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$

b) $f'(0)$ dla $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \ne 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$

zad. 3 Niech $f: R \to R$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{dla} \quad x \le 1 \\ -bx^2 + 2 & \text{dla} \quad -1 < x \le 0 \\ c\cos x + d & \text{dla} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ dp^{\cos x} + p - 1 & \text{dla} \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Dobrać parametry a, b, c, d, p tak, aby ta funkcja była różniczkowalna na R.

zad. 4 Zbadać czy podane funkcje maja pochodne niewłaściwe w punkcie $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \sqrt{|x| + \sqrt{|x|}}$ **b)** $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$

zad. 5 Obliczyć pochodne funkcji:

a) $y = \dfrac{x^{-2} + x^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{x^7}}{x^2}$ **b)** $y = (x^3 + 3x^2)\cos x$ **c)** $y = \operatorname{arcctg} x \cdot \ln x$

d) $y = \dfrac{e^x \arcsin x}{\operatorname{ctg} x}$ **e)** $y = (2x^4 - x^2 + 5)4^x \ln x$ **f)** $y = \sqrt{\sin x + x}$

g) $y = \cos^3 4x$ **h)** $y = 2\arcsin(x \ln x)$ **i)** $y = \ln\sqrt{\cos x + e^x}$

j) $y = \left(\sqrt[3]{x + \sin 2x} + x\ln x\right)^{14}$ **k)** $y = \operatorname{ctg}^3 \ln^2 x$ **l)** $y = e^{\sin x \cos 4x}$

m) $y = \dfrac{\sqrt{\ln x + x^3}\,\cos x^4}{\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x + x)}$ **n)** $y = \cos(4x + x\ln x)^5$ **o)** $y = \sin\log_3 x$

p) $y = 4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - \sin x + \sqrt{\operatorname{tg} x^4 + 5}}}$ **r)** $y = x\left(4\cos x + (\operatorname{tg} x + 3)^4\right)^5$

s) $y = (\ln x)^{\sin x}$ **t)** $y = x(\sin x)^{\cos x}$ **u)** $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

w) $y = \log_{3x} 5$ **x)** $y = \log_{x+3} \sin x$

zad. 6 Obliczyć pochodne funkcji i sprowadzić do najprostszej postaci:

a) $y = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 2x + 2\right| + \operatorname{arctg}(x+1)$

b) $y = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

c) $y = -\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin\frac{x}{2}$

d) $y = \frac{x\sqrt{x^2-36}}{2} - 18\ln\left|x + \sqrt{x^2-36}\right|$

zad. 7 Korzystając z definicji pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć pochodne następujących funkcji:

a) $y = \arcsin x^3$ **b)** $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ **c)** $y = \log_4 x$

zad. 8 Wyznaczyć wzór na n-tą pochodną funkcji i udowodnić indukcyjnie:

a) $y = \sqrt{x}$ **b)** $y = (1+x)^2$ **c)** $y = xe^x$

d) $y = \ln(2+x)$ **e)** $y = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$

zad. 9 Napisać równania stycznych do wykresów funkcji:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$ **b)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $x_0 = 1$

zad. 10 Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

a) $\frac{1}{\sqrt{9{,}02}}$ **b)** $\arccos 0{,}49$ **c)** $\ln 0.99$

zad. 11 Oszacować dokładność wzorów przybliżonych na podanych przedziałach:

a) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ dla $|x| < \frac{\pi}{6}$

b) $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ dla $|x| < \frac{1}{10}$

zad. 12 Korzystając ze wzoru Taylora obliczyć podane wyrażenia ze wskazana dokładnością:

a) $\cos 0{,}2$, 10^{-4} **b)** $\ln 0{,}9$, 10^{-2}

zad. 13 Obliczyć granice funkcji korzystając z reguły de L'Hôspitala:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\operatorname{arctg} x - \pi}$ **c)** $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln(x-1)}{\ln[\sin(x-1)]}$

d) $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$ **e)** $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)^2\ln(x+1)$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\operatorname{arcctg} x - \pi)$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^2}$ **h)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{e^{-x}}$ **i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ **k)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)\operatorname{ctg} x$ **l)** $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x-1}$ **n)** $\lim\limits_{x\to\alpha}(\alpha-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{\alpha}-\frac{\pi}{2}\right)$ **o)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{\sin x-\cos x}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$ **r)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

zad. 14 Znaleźć ekstrema funkcji:

a) $y=\left(x^2-3\right)e^x$ **b)** $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ **c)** $y=e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$

d) $y=x^2\ln x$ **e)** $y=(7+x)\sqrt[3]{11-3x}$ **f)** $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$

zad. 15 Znaleźć punkty przegięcia funkcji:

a) $y=\frac{1}{\ln x}$ **b)** $y=e^{\frac{1}{x-1}}$ **c)** $y=\operatorname{arctg}\ln x$

zad. 16 Pokazać, że funkcja

a) $y=\sqrt{1+x^2}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$ jest rosnąca i wklęsła na przedziale $(0,\infty)$

b) $y=xe^{-x^2}$ jest różnowartościowa na przedziale $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$

zad. 17 Wykazać następujące tożsamości:

a) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$ dla $x\in(-1,\infty)$

b) $2\operatorname{arctg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn} x$ dla $|x|\geq 1$

c) $3\arccos x-\arccos\left(3x-4x^3\right)=\pi$ dla $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$