Powtórka - ciągi, równania, funkcje.

1. Zbadać monotoniczność ciągu: a) $a_n = \frac{3^n - 4^n}{2^n}$ b) $a_n = \frac{3^n + 2}{6^n}$ c) $a_n = 3^n - 2^n$. Który z tych ciagów jest ciągiem ograniczonym?

2. Znaleźć granicę ciągu: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n + 12n^3 + 4}{4n^3 + n^2 - 3\cdot\sqrt{4n^6 - 1}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n + 2\sqrt{n^3 + 4n^2} - 2n}{3n^2 - 12n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + 6\cdot 4^{n+1}}{2^{2n+4} - 3\cdot 2^{n-1}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 7} - 5\sqrt{n^6 + 3n}}{5n^3 + 2n^2 - 3n}$ e) $\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n}\right)$ f) $\lim\left(\sqrt{n^2 + 3}\left(\sqrt{n^2 + 6} - \sqrt{n^2 + 4}\right)\right)$.

3. Rozwiązać: a) równanie $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$; $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$; $x^5 - 9x^3 = 0$; $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$, b) nierówność $x^2 - 3x + 2 \ge 0$; $x^3 - 3x^2 + 2x \le 0$; $x^3 - 4x^2 - 2x + 8 > 0$; $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 < 0$, $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \le 0$, $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$.

4. Określić dziedzinę funkcji: a) $f(x) = \sqrt{7 + 6x - x^2}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 + 5x^2 - 6x}$ c) $f(x) = \ln\left(\frac{1 - x^2}{2x}\right)$

d) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ e) $f(x) = \frac{2^x}{2^x - 1}$ f) $f(x) = \sqrt{\ln(5 - x)}$ g) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 4}{x + 1}\right)$ h) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x - 1}{x + 3}\right)$

i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - \frac{\log(4 - x)}{x^3 + x^2 - 20x}$ j) $f(x) = \log_3(x - x^2 + 6) - \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

5. Znaleźć wzór funkcji odwrotnej do : a) $f(x) = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = 2\arcsin(3x + 1)$ c) $f(x) = \frac{e^{3x-4}}{2}$.

d) $f(x) = 1 + \ln\left(\frac{x + 1}{2}\right)$ e) $f(x) = 4\cdot e^{\sqrt{x}} + 2$ g) $f(x) = 3\cdot 2^{x^2}$ h) $f(x) = 1 - \ln^2 x$ i) $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$.

6. Nie stosując twierdzenia L`Hospitala, znaleźć (w ramkach [ ] są podane odpowiedzi) :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2 - 14x + 12}{x^3 - x}$ $[-5]$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 6x^2 + 8}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^3 - 5x^2 + x - 5}{x^2 - 4x - 5}$ $\left[\frac{13}{2}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x^2 + x - 2}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 - x}{x^4 - 1}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\mathrm{tg} 5x}$ $\left[\frac{4}{5}\right]$ h) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{tg}\, 2x \cdot \mathrm{ctg}\, 6x)$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x + \sin 2x}{\sin 4x + \sin x}$ $[1]$ j) $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\left(\frac{3 + 2x - x^2}{2 + 2x^2}\right)$ $\left[\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{2}\right]$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{3 + x^2}{\sqrt{3}\,x^2}\right)$ $\left[\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}\right]$.

7. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji:

a) $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^2 + 2x}$ c) $f(x) = \frac{x^4 - 2x}{3x^2 - 3x}$ d) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$.

8. Dana jest funkcja: $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 5}{x^2 - 25} & \text{dla } x \ne 5 \text{ i } x \ne -5 \\ p & \text{dla } x = -5 \\ s & \text{dla } x = 5 \end{cases}$. Znaleźć (jeśli istnieją) takie wartości parametrów p i s , dla których funkcja f jest ciągła.

Rozwiązania wybranych zadań:

1. b) $a_{n+1} - a_n = \frac{3^{n+1}+2}{6^{n+1}} - \frac{3^n+2}{6^n} = \frac{3\cdot 3^n + 2 - 6\cdot 3^n - 12}{6\cdot 6^n} = \frac{-3\cdot 3^n - 10}{6\cdot 6^n} < 0$, więc ciąg jest malejący.
Ograniczoność: a) ciąg nie jest ograniczony, dąży do $-\infty$ b) $0 < a_n < 1$, ciąg ograniczony c) ciąg rosnący nieograniczony.

2. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n + 2\sqrt{n^3 + 4n^2 - 2n}}{3n^2 - 12n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n} + 2\cdot\sqrt{\frac{n^3}{n^4} + 4\frac{n^2}{n^4} - 2\frac{n}{n^4}}}{3 - 12\cdot\frac{n}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n} + 2\cdot\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n^3}}}{3 - \frac{12}{n}} = \frac{0}{3} = 0$ (na wstępie podzielono licznik i mianownik przez n^2 - najwyższą potęgę mianownika).

e) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}\right) = \lim\left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}} = \lim\frac{n^2+2n-(n^2-2n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}} =$

$\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}} = \lim\frac{4n}{n(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}})} = \lim\frac{4}{(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}})} = \frac{4}{1+1} = 2$.

4. c) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)$, $\frac{1-x^2}{2x} > 0 \Leftrightarrow (1-x^2)\cdot 2x > 0$, pierwiastki: $x=-1,\ x=0,\ x=1$. więc $x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$ (z wykresu). Zauważmy, że wtedy mianownik jest różny od zera, więc:
$D: x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$.

d) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k\in C$.

f) $f(x) = \sqrt{\ln(5-x)}$, $5-x>0$ oraz $\ln(5-x)\geq 0$. $x<5$ oraz $\ln(5-x)\geq \ln 1$, czyli $x<5$ oraz $5-x\leq 1$, ostatecznie $D: x\in\langle 4,\infty)$.

i) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - \frac{\log(4-x)}{x^3+x^2-20x}$ 1) $x^2+2x-3\geq 0$, 2) $4-x>0$, 3) $x^3+x^2-20x\neq 0$.
ad. 1) $x\in(-\infty,-3\rangle\cup\langle 1,\infty)$, ad. 2) $x\in(-\infty,4)$, ad. 3) $x\neq 0,\ x\neq 4,\ x\neq -5,$ więc ostatecznie:
$D: x\in(-\infty,-5)\cup(-5,-3>\cup<1,4)$.

j) $f(x) = \log_3(x-x^2+6) - \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$ 1) $-x^2+x+6>0$, 2) $x^2-1>0$, ad.1) $x\in(-2,3)$ ad.2) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Razem: $D: x\in(-2,-1)\cup(1,3)$.

5. a) $f(x) = \frac{1}{4}\ \mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}4x - \frac{\pi}{2}$ c) $f(x) = \frac{e^{3x-4}}{2}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(\ln 2x + 4)$

d) $f(x) = 1 + \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$, $f^{-1}(x) = 2e^{x-1} - 1$ g) $f(x) = 3\cdot 2^{x^2}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{\log_2\frac{x}{3}}$

i) $f(x) = \frac{e^x}{e^x-2}$ $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$.

6. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-14x+12}{x^3-x} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x-6)}{x(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-6)}{x(x+1)} = \frac{2(1-6)}{1(1+1)} = \frac{-10}{2} = -5$,

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-3x^2-4}{x^4-6x^2+8} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2+1)(x^2-4)}{(x^2-2)(x^2-4)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-2} = \frac{4+1}{4-2} = \frac{5}{2}$.

f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-x}{x^4-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x^3-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{1(1+1+1)}{(1+1)(1+1)} = \frac{3}{4}$.

h) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{tg}\,2x\cdot\mathrm{ctg}\,6x) = $ h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\cos 6x}{\sin 6x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x\cdot\frac{6x}{\sin 6x}\cdot\frac{1}{6x}\cdot\frac{\cos 6x}{\cos 2x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{6x}{\sin 6x}\cdot\frac{2x}{6x}\cdot\frac{\cos 6x}{\cos 2x}\right) = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$.

7. a) $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$, dziedzina: $x\neq -1, x\neq 1$, asymptoty: pionowa $x=-1$, pozioma $y=1$.

b) $f(x)=\frac{2x^2-4x}{x^2+2x}$, dziedzina: $x\neq -2, x\neq 0$, asymptoty: pionowa $x=-2$, pozioma $y=2$

c) $f(x)=\frac{x^4-2x}{3x^2-3x}$, dziedzina: $x\neq 0, x\neq 1$, asymptoty: pionowa $x=1$, poziomych i ukośnych nie ma .

d) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$, dziedzina: $x\neq -2, x\neq 2$, asymptoty: pionowa $x=-2$, pozioma $y=1$.

8. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}$, $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x-5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to -5}\frac{1}{x+5}$ - nie istnieje.

Stąd funkcja jest ciągła w $x=5$ dla $s=\frac{1}{10}$, ale nie istnieje p, dla którego f(x) byłaby ciągła w $x=-5$.