

Przestrzenie liniowe

zad. 1 W zbiorze R^2 określamy działania:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$$

Czy $(R^2, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową?

zad. 2 W zbiorze wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych rozpatrujemy podzbiory

$$A_1 = \{f: f(0) = 1\}$$

$$A_2 = \{f: f(0) = 0\}$$

Zbadać, czy $(A_i, R, +, \cdot)$ dla $i=1,2$, gdzie $+$, \cdot oznaczają dodawanie wielomianów i mnożenie wielomianu przez liczbę rzeczywistą, jest przestrzenią liniową.

zad. 3 Zbadać czy $(A_i, R, +, \cdot)$ są podprzestrzeniami liniowymi podanych przestrzeni liniowych:

a) $A_1 = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 = -2x_2\}, R^3$

b) $A_2 = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 = 1\}, R^3$

c) $A_3 = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 x_2 x_3 = 0\}, R^3$

d) $A_4 = \{W \in R_2[x]: W(1) = W'(0)\}, R_2[x]$

zad. 4 Zbadać, czy w przestrzeni $(R^3, R, +, \cdot)$ wektory

a) $x_1 = (2, -7, 2), x_2 = (0, 2, 4), x_3 = (2, -1, 5)$

b) $x_1 = (1, 2, 3), x_2 = (2, 3, 4), x_3 = (1, 1, 1)$

są liniowo niezależne.

Zad. 5 Zbadać, czy w przestrzeni $(R[x], R, +, \cdot)$ wektory

a) $2 - x^3, 3x + 2, x^2 + x - 1$

b) $3 - x, 4 + x, 2x + 3$

są liniowo niezależne.

zad. 6 Wyznaczyć generatory podanych przestrzeni liniowych:

a) $V = \{(x, y, z) \in R^3: 4x - y + 2z = 0\}$

b) $V = \{(2r + s - t, t - u, t + 3s + u, s + u, t - u): r, s, t, u \in R\}$

c) $V = \{W \in R_4[x]: W(1) + W'(0) = W(2) + W'(1) = 0\}$

zad. 7 Dane są wektory $x_1 = (1, 2, 0), x_2 = (\alpha, 0, \beta), x_3 = (0, \gamma, 1)$. Czy można dobrać α, β, γ tak, aby zbiór $\{x_1, x_2, x_3\}$ był zbiorem wektorów liniowo zależnych?

- zad. 8** Znaleźć taką wartość parametru α , by ciąg $\{x_1, x_2, x_3\}$, gdzie $x_1 = (1, 2, 3), x_2 = (3, 2, 1), x_3 = (4, \alpha, 5)$ tworzył bazę przestrzeni $(R^3, R, +, \cdot)$
- zad. 9** W przestrzeni wektorowej $(R^3, R, +, \cdot)$ dane są wektory $x_1 = (1, 0, 1), x_2 = (0, 1, 0), x_3 = (2, 3, 4)$.
Sprawdzić, że wektory te tworzą bazę w R^3 oraz znaleźć współrzędne wektora $x = (1, -3, -3)$ w danej bazie.
- zad. 10** Znaleźć bazę przestrzeni $V = \{W \in R_2[x] : W'(2) = 0\}$. Wyznaczyć współrzędne wektora $U = x^2 - 3x + 2$ w tej bazie.