Przewodnik do ćwiczeń
Lista numer 4

Szeregi liczbowe

Dany jest ciąg liczbowy (a_n).

Definicja 1

Ciąg

$$(S_n)\ :\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazywamy *szeregiem liczbowym* i oznaczamy symbolem :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \bullet$$

Definicja 2

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazywamy *zbieżnym* jeżeli istnieje granica właściwa

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad .$$

W przeciwnym wypadku mówimy , szereg jest *rozbieżny* $\bullet$

Przykład 1

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

jest zbieżny ponieważ:

$$S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{i} \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1 .$$

Twierdzenie 1 (warunek konieczny zbieżności szeregu)

Jeżeli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \bullet$$

Przykład 2

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

nie jest zbieżny ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \neq 0 .$$

Twierdzenie 2 (kryterium porównawcze)

Jeżeli istnieje taka liczba naturalna δ , że dla każdej liczby naturalnej $n \geq \delta$

$$a_n \leq b_n$$

to :

(**1**) ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(**2**) z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\bullet$

Szereg Dirichleta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

jest :

(1) zbieżny dla $\alpha > 1$

(2) rozbieżny dla $\alpha \leq 1$ ●

Szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$$

jest

(1) zbieżny dla a=0 i dowolnego q . S=0

(2) zbieżny dla a$\neq 0$ i $|q| < 1$. S=$\frac{a}{1-q}$

(3) rozbieżny dla a$\neq 0$ i $|q| \geq 1$ ●

Przykład 3

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ jest zbieżny ponieważ :

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n} = 0$.

i

2) dla każdej liczby naturalnej n > 1 = δ

$a_n = \frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n} = b_n$ oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ jest zbieżny .

Twierdzenie 3 (kryterium d'Alemberta)

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ = g to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny gdy

g < 1 oraz rozbieżny gdy g > 1 ●

Przykład 4

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$ jest zbieżny ponieważ :

$$a_n = \frac{7^n}{n!} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{7^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n+1} = 0 < 1 \ .$$

Twierdzenie 4 (kryterium Cauchy'ego)

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$ to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny

gdy $g < 1$ oraz rozbieżny gdy $g > 1$ ●

Przykład 5

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arccos \frac{1}{n} \right)^{2n}$ jest rozbieżny ponieważ :

$$a_n = \left(\arccos \frac{1}{n} \right)^{2n} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\arccos \frac{1}{n} \right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\arccos \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} > 1 \ .$$

Uwaga

Kryterium Cauchy'ego jest mocniejsze od kryterium D'Alemberta .

Zadanie 1
Za pomocą kryterium porównawczego , zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 5n}}$ (zbieżny)

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$ (rozbieżny)

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$ (zbieżny)

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n(n^2 + 1)}$ (rozbieżny)

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 + 4 + \ldots + 2n}{n^3}$ (rozbieżny)

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt{n^5+n+2}}$ (zbieżny)

Zadanie 2
Za pomocą kryterium d'Alemberta , zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ (zbieżny)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (zbieżny)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n+3)!3^n}{(2n)!}$ (zbieżny)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}}{(3n)!}$ (zbieżny)

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ (rozbieżny)

Zadanie 3

Za pomocą kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^n$ (zbieżny)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ (rozbieżny)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+1}}$ (zbieżny)