Przewodnik do ćwiczeń

Lista numer 6

Ciągi i szeregi funkcyjne

Niech X będzie niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych R .

Oznaczmy przez R^X zbiór wszystkich funkcji $f : X \to R$.

Definicja 1

Jeżeli każdej liczbie naturalnej n została przyporządkowana dokładnie jedna funkcja $f_n(x) \in R^X$ to mówimy , że w zbiorze X został określony ciąg funkcyjny i zapisujemy $\{ f_n(x) \}$ •

Funkcję $f_n(x)$ nazywamy $n - tym$ wyrazem ciągu $\{ f_n(x) \}$.

Ciąg funkcyjny określamy podając wzór funkcji $f_n(x)$, która została przyporządkowana liczbie naturalnej n . Na przykład :

(1) $\{ f_n(x) \} \ : \ f_n(x) = x^n$.

Uwaga

Dla każdego ustalonego $x_0 \in X$ ciąg $\{ f_n(x_0) \}$ jest ciągiem liczbowym , który może być zbieżny albo rozbieżny .

Przykład 1

W ciągu funkcyjnym (1) dla

(a) $x = 2$ otrzymujemy ciąg liczbowy $\{ f_n(2) \} \ : \ f_n(2) = 2^n$, który jest rozbieżny , ponieważ $\lim_{n \to \infty} 2^n = \infty$.

(b) $x = \frac{1}{2}$ otrzymujemy ciąg liczbowy $\{ f_n\left(\frac{1}{2}\right) \}$: $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, który jest zbieżny , ponieważ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Definicja 2

Ciąg funkcyjny $\{ f_n(x) \}$ nazywamy zbieżnym w zbiorze X do *funkcji granicznej* $f(x)$, i piszemy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{albo} \quad f_n(x) \underset{X}{\rightarrow} f(x)$$

wtedy tylko wtedy , gdy dla każdego $x_0 \in X$ ciąg liczbowy $\{ f_n(x_0) \}$ jest zbieżny do $f(x_0)$ ●

Przykład 2

Ciąg funkcyjny $\{ f_n(x) \}$: $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ jest zbieżny w zbiorze liczb rzeczywistych do funkcji granicznej

$$f(x) = \begin{cases} 0 & dla \quad x = 0 \\ 1 & dla \quad x \neq 0 \end{cases} .$$

Istotnie :

dla $x \neq 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+nx} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{n}+x} = \frac{x}{x} = 1$,

dla $x = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to 1} 0 = 0$.

Niech $\{ f_n(x) \}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym w zbiorze X .

Definicja 3

Ciąg funkcyjny

$$\{S_n(x) \} \quad : \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

nazywamy *szeregiem funkcyjnym* i oznaczamy symbolem

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \bullet$$

Funkcje $f_n(x)$ gdzie $n = 1, 2, \ldots$ nazywamy *wyrazami szeregu* $(*)$.

Definicja 4

Szereg funkcyjny $(*)$ nazywamy *zbieżnym* w zbiorze X jeżeli

$$S_n(x) \underset{X}{\rightarrow} S(x) \quad \bullet$$

Funkcję graniczną $S(x)$ nazywamy *sumą* szeregu $(*)$ w zbiorze X

i piszemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{X}{=} S(x) \; .$$

Szereg , który nie jest zbieżny nazywamy *rozbieżnym* .

Przykład 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \underset{X}{=} S(x) = \frac{1}{1-x}$$

gdzie $X = (0, 1)$.

Jeżeli ciąg $\{S_n(x)\}$ jest jednostajnie zbieżny w zbiorze X to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy *jednostajnie zbieżnym* w zbiorze X .

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w zbiorze X i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest zbieżny w zbiorze X to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym* w zbiorze X .

Twierdzenie 1 (o całkowaniu szeregu funkcyjnego)

Jeżeli wyrazy $f_n(x)$ szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale domkniętym $<a, b>$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $<a, b>$ to

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad \bullet$$

Twierdzenie 2 (o różniczkowaniu szeregu geometrycznego)

Jeżeli wyrazy $f_n(x)$ szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ maja ciągłe pochodne $f'_n(x)$ w przedziale $<a, b>$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w przedziale $<a, b>$.

Jeżeli ponadto szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'(x)$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $<a, b>$, to

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

dla każdego $x \in <a, b>$ $\bullet$

Zadanie 1

Wiedząc , że $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \underset{X}{=} S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ gdzie $X = (0, 1)$, oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Rozwiązanie

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}$

obie strony równania (1) mnożymy przez x

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$

obie strony równania (2) różniczkujemy

(3) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)'$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

obie strony równania (4) mnożymy przez x

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Zadanie 2

Oblicz sumy następujących szeregów :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ w przedziale $X = (0\,,1)$ ($S(x) = -\ln(1-x)$)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ w przedziale $X = (0\,,1)$ ($S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1}$ w przedziale $X = \left(0\,,\frac{1}{2}\right)$ ($S(x) = -\frac{\ln(1-2x)}{2x}$)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{3^n}$ w przedziale $X = (0\,,3)$ ($S(x) = \frac{3x}{(3-x)^2}$)

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ w przedziale $X = (0\,,1)$ ($S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$) .