

Pytania i zagadnienia do egzaminu z matematyki AiR, S1, I semestr 2010/11

Egzamin składa się z 2 części: pisemnej i ustnej. Z obu części należy otrzymać ocenę pozytywną, to jest ok. 55%-60% z części pisemnej i ok. 70% z części ustnej. W części pisemnej rozwiązujemy zadania. **Należy przynieść ze sobą 4-5 arkuszy papieru w kratkę, formatu A3.** Prace na kartkach innego formatu nie będą odbierane. Można przynieść prosty kalkulator, linijkę. Nie wolno używać telefonów, również jako kalkulatora. W części ustnej odpowiadamy na pytania z teorii. Po wejściu na salę otrzymujemy pytania. Odpowiedzi przygotowujemy na kartce papieru, z którą podchodzimy do odpowiedzi. Sprawdzana jest znajomość i rozumienie definicji, twierdzeń, sposobu ich formułowania, notacji matematycznej. Przygotowując się do części pisemnej należy równocześnie uczyć się teorii! **TO JEST JEDEN EGZAMIN!** Proszę zwrócić uwagę na poprawność wypowiedzianych twierdzeń, definicji itd., również pod kątem zgodności z regułami języka polskiego. Nie należy próbować formułować twierdzeń, definicji itd. własnymi słowami. Pytania i zagadnienia obejmują zakres wymaganej wiedzy teoretycznej oraz opis wymaganych umiejętności praktycznych.

UWAGA! Ze względów redakcyjnych kolejność pytań różni się od kolejności materiału na wykładzie. Szczegółowej uwadze polecam zagadnienia oznaczone symbolem ♠.

1. Aksjomaty liczb rzeczywistych. Ciało liczb rzeczywistych. Zbiór liczb zespolonych jako zbiór par liczb rzeczywistych z określonymi w nim działaniami spełniającymi pewne aksjomaty. Ciało liczb zespolonych.
2. ♠ Postać kartezjańska liczby zespolonej. Moduł. Sprzężenie. Ich własności. Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych. Argument i postać trygonometryczna liczby zespolonej. Własności argumentu. Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej. Wykonywanie działań arytmetycznych na liczbach zespolonych.
3. Potęgowanie liczb zespolonych - wzór Moivre'a. Określenie pierwiastka stopnia n liczby zespolonej i jego obliczanie. Obliczanie pierwiastków stopnia 2.
4. ♠ Rozwiązywanie prostych równań stopnia 2 lub 3 o współczynnikach zespolonych lub o współczynnikach rzeczywistych i ujemnym wyróżniku ($\Delta < 0$).
5. Pierwiastki z jedności. Czym jest iloczyn takich pierwiastków? Jaka tworza strukturę?
6. Definicja równania stopnia n . Rozwiązywalność równań stopnia n - istnienie rozwiązań dokładnych w zależności o stopnia równania.

7. ♠ Definicja wielomianu stopnia n . Twierdzeni Bézout. Postać iloczynowa. Twierdzenie o rozkładzie na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego. Zasadnicze twierdzenie algebry.
8. Definicja macierzy. Wybrane rodzaje macierzy. Działania na macierzach.
9. Permutacja, transpozycja, znak permutacji. Definicja wyznacznika macierzy. Rozwinięcie Laplace'a.
10. Własności wyznaczników.
11. ♠ Definicja macierzy odwrotnej. Tw. Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy. Wnioski. Warunek istnienia macierzy odwrotnej.
12. Rozwiązywanie równań macierzowych.
13. Układy n równań liniowych o n niewiadomych. Istnienie i liczba rozwiązań takiego układu (Tw.z punktami a), b), c)).
14. Rozwiązywanie układów równań liniowych z parametrem.
15. Metoda eliminacji Gaussa.
16. ♠ Odległość na prostej, na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej. Otoczenie punktu.
17. ♠ Definicja funkcji. Funkcje: monotoniczna, monotoniczna przedziałami, różnowartościowa, wzajemnie jednoznaczna, odwrotna do danej, ograniczona, okresowa.
18. ♠ Definicja ciągu. Definicja granicy ciągu. "Prawie wszystkie wyrazy ciągu".
19. ♠ Definicja granic niewłaściwych ciągów: $+\infty$ oraz $-\infty$. Ciąg rozbieżny.
20. Twierdzenia o ciągach (tw. o trzech ciągach itd.). Dowody.
21. Wzór dwumianowy Newtona. Symbole Newtona. Liczba e . Ciąg $(1 + \frac{1}{n})^n$.
22. Granice innych wybranych ciągów.
23. ♠ Ciąg geometryczny. Suma ciągu geometrycznego
24. ♠ Definicja granicy funkcji jednej zmiennej o wartościach w R . Granice niewłaściwe.
25. Granice jednostronne.
26. Potęgowanie i funkcja wykładnicza.
27. ♠ Definicja logarytmu i jego własności. Funkcja logarytmiczna.

28. ♠ Definicje, własności i wykresy funkcji elementarnych : wartość bezwzględna, wielomiany, f. homograficzna, f. wymierne, f. trygonometryczne, f. cyklometryczne, f. wykładnicze, f. logarytmiczne.
29. ♠ Wartości funkcji elementarnych w punktach charakterystycznych dla danej funkcji, zachowanie się funkcji elementarnych na krańcach przedziału określoności.
30. ♠ Rozwiązywanie równań i nierówności: z wartością bezwzględną, wymiernych.
31. ♠ Związki nierówności: $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ z położeniem wykresu funkcji.
32. ♠ Wzory trygonometryczne: $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$, jedynkowy, podwójnego kąta..
33. Ciągłość funkcji. Własności funkcji ciągłych. Tw. Darboux.
34. Wybrane granice specjalne funkcji.
35. ♠♠ Def. pochodnej funkcji. Interpretacja geometryczna. Pochodne jednostronne.
36. ♠ Styczna i normalna do wykresu funkcji.
37. Własności pochodnej. ♠ Pochodne funkcji elementarnych.
38. Ciągłość funkcji różniczkowalnej. Dowód.
39. Różniczka funkcji i interpretacja geometryczna. Zastosowanie.
40. Tw. Rolla - Lagrange'a. Wnioski. Dowody.
41. Reguła de l'Hospitala.
42. ♠ Wyznaczanie dziedzin funkcji złożonych (inaczej: rozwiązywanie równań i nierówności różnych typów!).
43. ♠ Definicje minimum i maksimum lokalnego funkcji jednej zmiennej. Warunki: konieczny i pierwszy dostateczny istnienia ekstremum. Przedziały monotoniczności.
44. Definicja pochodnej rzędu n . Pochodne rzędu n wybranych funkcji.
45. ♠ Wzory: Taylora i Maclaurina. Reszta Lagrange'a.
46. ♠ Wzory Maclaurina dla wybranych funkcji.
47. ♠ Drugi warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej. Przedziały wypukłości i punkty przegięcia.
48. ♠ Asymptoty wykresu funkcji.

49. ♠♠ Badanie przebiegu zmienności funkcji. Krysicki, Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, dwa rozdziały: 10 i 13? oraz funkcje takie, jak $\arctg(x^2 - 2x)$, $\arctg(x - \sqrt{x})$, $\arcsin(\cos x - \frac{1}{2})$, $\arcsin(1 - \sqrt{x})$.
50. ♠ Elipsa, hiperbola, lemniskata Bernoulliego. Jak powstają? Równania kanoniczne elipsy i hiperboli.
51. Elementy geometrii w R^n . Wektor zaczepiony i swobodny. Działania na wektorach.
52. Iloczyn skalarny w R^n i jego własności. Przestrzeń Euklidesowa. Długość wektora, kąt pomiędzy wektorami. Warunek prostopadłości wektorów.
53. Iloczyn wektorowy i jego własności. Interpretacja geometryczna. Warunek równoległości wektorów.
54. Iloczyn mieszany i jego własności. Interpretacja geometryczna.
55. ♠ Rozkład wektora na kierunki innych wektorów (inne sformułowanie: przedstaw dany wektor w postaci kombinacji liniowej innych wektorów).
56. Definicja całki nieoznaczonej. Jej własności. Całki funkcji elementarnych.
57. Całkowanie przez części. Zamiana zmiennych.
58. Ułamki proste. Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste. Sprowadzanie trójmianu do postaci kanonicznej. Całkowanie funkcji. wymiernych.
59. Jakiego rodzaju wzory nazywamy rekurencyjnymi? Wzory rekurencyjne dla całek $\int \sin^n x dx$, $\int \frac{1}{\sin^n x} dx$.
60. Całkowanie funkcji algebraicznych: $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.
61. Całkowanie funkcji trygonometrycznych. Podstawienia uniwersalne.
62. ♠♠ Def. całki oznaczonej. Interpretacja geometryczna.
63. Funkcja całkowna. Jakie klasy funkcji są całkowne. Inne własności całki oznaczonej.
64. Tw. o wartości średniej dla całek. Dowód.
65. ♠ Twierdzenie o calce oznaczonej jako funkcji granicy całkowania. Twierdzenie Newtona. Dowody.
66. Obliczanie całek oznaczonych metodą przez części i przez zamiane zmiennych (i granic!!).