

Pytania i zagadnienia do egzaminu z matematyki E, S1, I semestr 2012/13

Na egzamin przychodzimy z legitymacją studencką. Egzamin składa się z 2 części: pisemnej i ustnej. Z obu części należy otrzymać ocenę pozytywną, to jest ok. 55%-60% z części pisemnej i ok. 70% z części ustnej. W części pisemnej rozwiązujemy zadania. **Należy przynieść ze sobą 4-5 arkuszy papieru w kratkę, formatu A3.** Prace na kartkach innego formatu nie będą odbierane. Można przynieść prosty kalkulator, linijkę. Nie wolno używać telefonów, również jako kalkulatora. W części ustnej odpowiadamy na pytania z teorii. Po wejściu na salę otrzymujemy pytania. Odpowiedzi przygotowujemy na kartce papieru, z którą podchodzimy do odpowiedzi. Sprawdzana jest znajomość i rozumienie definicji, twierdzeń, sposobu ich formułowania, notacji matematycznej. Przygotowując się do części pisemnej należy równocześnie uczyć się teorii! **TO JEST JEDEN EGZAMIN!** Proszę zwrócić uwagę na poprawność wypowiedzianych twierdzeń, definicji itd., również pod kątem zgodności z regułami języka polskiego. Nie należy próbować formułować twierdzeń, definicji itd. własnymi słowami. Pytania i zagadnienia obejmują zakres wymaganej wiedzy teoretycznej oraz opis wymaganych umiejętności praktycznych.

Wykład i ćwiczenia opierają się na wiadomościach i umiejętnościach które powinny zostać nabyte w szkole ponadgimnazjalnej. Niektóre z poniższych punktów przypominają o tym.

UWAGA! Ze względów redakcyjnych kolejność pytań różni się od kolejności materiału na wykładzie i ćwiczeniach. Szczegółowej uwadze polecam zagadnienia oznaczone symbolami ♠ oraz ♠♠.

Elementy algebry i geometrii

1. Aksjomaty liczb rzeczywistych. Ciało liczb rzeczywistych. Zbiór liczb zespolonych jako zbiór par liczb rzeczywistych z określonymi w nim działaniami spełniającymi pewne aksjomaty. Ciało liczb zespolonych.
2. ♠ Postać kartezjańska liczby zespolonej. Moduł. Sprzężenie. Ich własności. Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych. Argument i postać trygonometryczna liczby zespolonej. Własności argumentu. Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej. Wykonywanie działań arytmetycznych na liczbach zespolonych.
3. Potęgowanie liczb zespolonych - wzór Moivre'a. Określenie pierwiastka stopnia n liczby zespolonej i jego obliczanie. Obliczanie pierwiastków stopnia 2.
4. ♠ Rozwiązywanie prostych równań stopnia 2 lub 3 o współczynnikach zespolonych lub o współczynnikach rzeczywistych i ujemnym wyróżniku ($\Delta < 0$).

5. Pierwiastki z jedności. Czym jest iloczyn takich pierwiastków? Jaka tworzą strukturę?
6. Definicja równania stopnia n . Rozwiązywalność równań stopnia n - istnienie rozwiązań dokładnych w zależności o stopnia równania.
7. ♠ Definicja wielomianu stopnia n . Twierdzenie Bézout. Postać iloczynowa. Twierdzenie o rozkładzie na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego. Zasadnicze twierdzenie algebry.
8. Definicja macierzy. Wybrane rodzaje macierzy. Działania na macierzach.
9. Permutacja, transpozycja, znak permutacji. Definicja wyznacznika macierzy. Rozwinięcie Laplace'a.
10. Własności wyznaczników.
11. ♠ Definicja macierzy odwrotnej. Tw. Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy. Wnioski. Warunek istnienia macierzy odwrotnej.
12. Rozwiązywanie równań macierzowych.
13. Układy n równań liniowych o n niewiadomych. Istnienie i liczba rozwiązań takiego układu (Tw.z punktami a), b), c)).
14. Rozwiązywanie układów równań liniowych z parametrem.
15. Metoda eliminacji Gaussa.
16. Wektor zaczepiony i wektor swobodny w R^n . Dodawanie wektorów i mnożenie przez liczbę.
17. Definicja iloczynu skalarnego wektorów i jego własności.
18. ♠ Długość wektora. Kąt pomiędzy wektorami. Warunek prostokątności dwóch wektorów.
19. Definicja iloczynu wektorowego wektorów i jego własności. Interpretacja geometryczna.
20. Warunek równoległości dwóch wektorów.
21. Definicja iloczynu mieszanego wektorów i jego własności. Interpretacja geometryczna.
22. ♠ Wielomian charakterystyczny macierzy. Wektory własne i wartości własne macierzy.
23. ♠ Równania prostej na płaszczyźnie. Wyprowadzenia.
24. Równania prostej w przestrzeni R^3 . Jak powstają?
25. Równanie płaszczyzny w R^3 . Jak powstaje?

26. ♠ Rzut prostej na płaszczyznę, Rzut punktu na płaszczyznę. Punkt symetryczny do danego względem płaszczyzny.

Rachunek różniczkowy

1. ♠ Odległość na prostej, na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej. Otoczenie punktu.
2. ♠♠ Definicja funkcji. Funkcje: monotoniczna, monotoniczna przedziałami, różnowartościowa, wzajemnie jednoznaczna, odwrotna do danej, ograniczona, okresowa.
3. ♠ Definicja ciągu. Definicja granicy ciągu. "Prawie wszystkie wyrazy ciągu".
4. ♠ Definicja granic niewłaściwych ciągów: $+\infty$ oraz $-\infty$. Ciąg rozbieżny.
5. Twierdzenia o ciągach (tw. o trzech ciągach itd.). Dowody.
6. ♠ Wzór dwumianowy Newtona. Symbole Newtona. Liczba e . Ciąg $(1 + \frac{1}{n})^n$.
7. Granice innych wybranych ciągów.
8. ♠ Ciąg geometryczny. Suma ciągu geometrycznego
9. ♠ Definicja granicy funkcji jednej zmiennej o wartościach w R . Granice niewłaściwe.
10. Granice jednostronne.
11. Potęgowanie i funkcja wykładnicza.
12. ♠ Definicja logarytmu i jego własności. Funkcja logarytmiczna.
13. ♠♠ Definicje, własności i wykresy funkcji elementarnych : wartość bezwzględna, wielomiany, f. homograficzna, f. wymierne, f. trygonometryczne, f. cyklometryczne, f. wykładnicze, f. logarytmiczne.
14. ♠ Wartości funkcji elementarnych w punktach charakterystycznych dla danej funkcji, zachowanie się funkcji elementarnych na krańcach przedziału określoności.
15. ♠ Rozwiązywanie prostych równań i nierówności: z wartością bezwzględną, wymiernych, np. $|x - a| > b$, $\frac{x-a}{x-b} = x$, itp.
16. ♠ Związki nierówności: $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ z położeniem wykresu funkcji.
17. ♠ Wzory trygonometryczne: $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$, jedynekowy, podwójnego kąta..
18. Ciągłość funkcji. Własności funkcji ciągłych.

19. Wybrane granice specjalne funkcji.
20. ♠♠ Def. pochodnej funkcji. Interpretacja geometryczna. Pochodne jednostronne.
21. ♠ Styczna i normalna do wykresu funkcji.
22. Własności pochodnej. ♠ Pochodne funkcji elementarnych.
23. Ciągłość funkcji różniczkowalnej. Dowód.
24. Różniczka funkcji i interpretacja geometryczna. Zastosowanie.
25. ♠ Tw. Rolla - Lagrange'a. Wnioski. Dowody.
26. Reguła de l'Hospitala.
27. ♠ Wyznaczanie dziedzin funkcji złożonych (inaczej: rozwiązywanie równań i nierówności różnych typów!).
28. ♠ Definicje minimum i maksimum lokalnego funkcji jednej zmiennej. Warunki: konieczny i pierwszy dostateczny istnienia ekstremum. Przedziały monotoniczności.
29. Definicja pochodnej rzędu n . Pochodne rzędu n wybranych funkcji.
30. ♠ Wzory: Taylora i Maclaurina. Reszta Lagrange'a.
31. ♠ Wzory Maclaurina dla wybranych funkcji. Uogólniony symbol Newtona.
32. ♠ Drugi warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej. Przedziały wypukłości i punkty przegięcia.
33. ♠ Asymptoty wykresu funkcji.
34. ♠♠ Badanie przebiegu zmienności funkcji. Krysicki, Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, dwa rozdziały: 10 i 13? oraz funkcje takie, jak $\arctg(x^2 - 2x)$, $\arctg(x - \sqrt{x})$, $\arcsin(\cos x - \frac{1}{2})$, $\arcsin(1 - \sqrt{x})$.
35. ♠ Elipsa, hiperbola, owale Cassiniego, lemniskata Bernoulliego. Jak powstają? Równania kanoniczne elipsy i hiperboli.

Rachunek całkowy

1. Definicja całki nieoznaczonej. Jej własności. Całki funkcji elementarnych.
2. Całkowanie przez części. Zamiana zmiennych w calce nieoznaczonej.
3. Ułamki proste. Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste. Sprowadzanie trójmianu do postaci kanonicznej. Całkowanie funkcji. wymiernych.
4. Jakiego rodzaju wzory nazywamy rekurencyjnymi? Wzory rekurencyjne dla całek $\int \sin^n x dx$, $\int \frac{1}{\sin^n x} dx$. Stosowanie wzorów rekurencyjnych.

5. Całkowanie funkcji algebraicznych: $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.
6. ♠♠ Def. całki oznaczonej. Interpretacja geometryczna.
7. Funkcja całkowalna. Jakie klasy funkcji są całkowalne. Inne własności całki oznaczonej.
8. Tw. o wartości średniej dla całek. Dowód.
9. ♠ Twierdzenie o całce oznaczonej jako funkcji granicy całkowania. Twierdzenie Newtona. Dowody.
10. Obliczanie całek oznaczonych metodą przez części i przez zamianę zmiennych (i granic!!).