

PYTANIA I ZAGADNIENIA DO EGZAMINU Z MATEMATYKI WE (AiR), S1, II semestr 2009/10

Do opanowania materiału semestru drugiego niezbędna jest znajomość funkcji i ich własności, umiejętność różniczkowania i całkowania oraz ogólne obycie w prowadzeniu rachunków. Część pytań obejmuje materiał wyłożony w semestrze I.

Egzamin składa się z 2 części: pisemnej i ustnej. W części pisemnej rozwiązujemy zadania. **Należy przynieść ze sobą 4 arkusze papieru w kratkę, formatu A3.** Prace na kartkach innego formatu nie będą odbierane. Można przynieść prosty kalkulator. Nie wolno używać telefonów, również jako kalkulatora oraz innych urządzeń elektronicznych.. W części ustnej odpowiadamy na pytania z teorii. Po wejściu na salę otrzymujemy pytania. Odpowiedzi przygotowujemy na kartce papieru, z którą podchodzimy do odpowiedzi. Sprawdzana jest znajomość i rozumienie definicji, twierdzeń, sposobu ich formułowania, notacji matematycznej. **Przygotowując się do części pisemnej należy równocześnie uczyć się teorii!** Proszę zwrócić uwagę na poprawność wypowiedzianych twierdzeń, definicji itd., również pod kątem zgodności z regułami języka polskiego. Nie należy próbować formułować twierdzeń, definicji itd. własnymi słowami.

UWAGA! Ze względów redakcyjnych kolejność pytań różni się nieznacznie od kolejności materiału na wykładzie. Szczegółowej uwadze polecam zagadnienia oznaczone symbolem ♠. Punkty oznaczone literą P zawierają wyprowadzenia, które mogą pojawić się na części pisemnej egzaminu.

1. ♠ Definicja funkcji. Definicje, własności, wykresy funkcji elementarnych.
2. ♠ Definicja całki nieoznaczonej. Jej własności. Całkowanie przez części. Zamiana zmiennych w całce nieoznaczonej. Całki funkcji elementarnych. Podstawowe metody całkowania.
3. Definicja całki oznaczonej. Jej własności. Interpretacja geometryczna. Całkowanie przez części i zamiana zmiennych.
4. Całkowanie funkcji wymiernych. Rozkład na ułamki proste.
5. ♠ Wzory trygonometryczne. Całkowanie wybranych rodzajów funkcji trygonometrycznych- podstawienia uniwersalne.
6. Definicja, własności i obliczanie pochodnych cząstkowych funkcji n zmiennych. Lemat Schwarzera.
7. ♠ Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji złożonej.
8. Definicja ekstremum lokalnego funkcji n zmiennych.

9. Forma kwadratowa. Kiedy mówimy, że forma jest określona dodatnio, a kiedy ujemnie?
10. Warunki: konieczny i dostateczny istnienia ekstremum lokalnego. Znajdowanie ekstremów lokalnych funkcji n zmiennych.
11. Definicje i własności całek niewłaściwych I i II rodzaju. Obliczanie.
12. ♠ Definicja nieskończonego ciągu geometrycznego. Co nazywamy jego sumą, kiedy istnieje i ile wynosi?
13. ♠ Szereg liczbowy i jego suma. Definicja zbieżności szeregu. Warunek konieczny zbieżności.
14. ♠ Szereg geometryczny. Szereg harmoniczny.
15. Kryteria zbieżności szeregów liczbowych: porównawcze, porównawcze ilorazowe, porównawcze Cauchy'ego - zastosowanie do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, całkowite Cauchy'ego - zastosowanie do szeregu Dirichleta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, ilorazowe d'Alamberta, pierwiastkowe. Badanie zbieżności.
16. ♠ Szereg przemienny i kryterium Leibniza. Szacowanie reszty w szeregu przemiennym, ($|R_m| < a_{m+1}$).
17. ♠ Zbieżność bezwzględna i warunkowa.
18. Reszta szeregu i jej własności.
19. ♠ Działania na szeregach.
20. ♠ Szeregi funkcyjne. Zbieżność punktowa i jednostajna. Kryterium Weierstrassa.
21. ♠ Operacje algebraiczne i analityczne (całkowanie, różniczkowanie) na szeregach funkcyjnych.
22. Szereg potęgowy. Twierdzenie Abela. Własności szeregów potęgowych.
23. ♠ Badanie przedziałów zbieżności szeregów potęgowych. (Konieczna jest umiejętność rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.)
24. ♠ Szeregi potęgowe funkcji elementarnych. Wzór Leibniza. Znajdowanie rozwinięć prostych funkcji przy pomocy operacji na szeregach.
25. Szeregi Taylora i Maclaurina.
26. P ♠ Rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji tgx .
27. P ♠ Zastosowanie szeregów i przekształceń na nich do obliczania wartości logarytmów - wyprowadzenie.

28. ♠ Ciąg ortogonalny i szereg ortogonalny. Szereg Fouriera funkcji ortogonalnych. Wyprowadź wzory na współczynniki Fouriera.
29. P ♠ Szereg trygonometryczny Fouriera. Podaj warunki przy których szereg trygonometryczny Fouriera funkcji f jest zbieżny punktowo do funkcji f (warunki Dirichleta). Zadanie: mając dany wykres funkcji f narysować wykres jej szeregu trygonometrycznego Fouriera $SF(f)$.
30. ♠ Całka oznaczona funkcji parzystej i nieparzystej w przedziale symetrycznym względem początku układu. Szereg trygonometryczny Fouriera funkcji parzystej i nieparzystej.
31. P ♠ Rozwiązania okresowe równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach. Wyprowadź wzory na współczynniki rozwiązania. Z ich pomocą rozwiąż równanie. (Zestaw zadań z przykładami: www.im.ps.pl).
32. Określenie równania różniczkowego (r.r.). Rząd równania. Całka szczególna i całka ogólna r.r. (Całka r.r. === rozwiązanie r.r.)
33. Zagadnienie Cauchy'ego dla r.r. I rzędu. Twierdzenie o istnieniu rozwiązania zagadnienia Cauchy.
34. R.r. o zmiennych rozdzielonych i r.r. do nich sprowadzalne: $y' = f(\frac{y}{x})$.
35. R.r liniowe rzędu I. Metoda uzmienniania stałej.
36. ♠ Równanie Bernoulliego.
37. ♠ Liniowa niezależność układu funkcji. Wyznacznik Wrońskiego.
38. ♠ Jakie r.r. nazywamy zupełnym? Co to jest czynnik całkujący? Wyprowadź równanie różniczkowe cząstkowe na czynnik całkujący.
39. R.r. liniowe rzędu II. Twierdzenia o własnościach rozwiązań.
40. ♠ Metoda uzmienniania stałych dla r.r. liniowego rzędu drugiego (metoda Lagrange). (Zestaw zadań z przykładami: www.im.ps.pl).
41. Definicja przekształcenia Laplace, oryginału, obrazu. Zastosowanie do rozwiązywania zagadnienia Cauchy. Rozkład na ułamki proste. (Zestaw zadań z przykładami: www.im.ps.pl).
42. Zagadnienie Cauchy'ego dla r.r rzędu II. Zagadnienia: brzegowe i asymptotyczne.
43. R.r. liniowe rzędu II o stałych współczynnikach; trzy przypadki. Metoda przewidywań.
44. Definicja całki krzywoliniowej nieskierowanej. Zamiana na całkę oznaczoną. Interpretacje.

45. Definicja całki krzywoliniowej skierowanej. Zamiana na całkę oznaczoną. Interpretacje.
46. Niezależność całki krzywoliniowej skierowanej od drogi całkowania na płaszczyźnie i w przestrzeni.
47. Definicja całki podwójnej. Obszar normalny. Zamiana całki podwójnej na całkę iterowaną.
48. Wyznacznik Jacobiego. Zamiana zmiennych w całce podwójnej - Biegunowy układ współrzędnych.
49. Zastosowania całki podwójnej: pole powierzchni płata, objętość, masa.