Zadania z funkcji zmiennej zespolonej

Stanisław Ewert-Krzemieniewski

June 3, 2004

1 Wzór całkowy Cauchy'ego

Twierdzenie: Jeżeli f jest funkcją holomorficzną wewnątrz i na brzegu obszaru D ograniczonego jedną krzywą zamkniętą C, zorientowaną dodatnio, bez punktów wielokrotnych, to dla dowolnego punktu $z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{1}$$

oraz, dla $n \in N$,

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \tag{2}$$

1. (a) $\int\limits_{K(0,\frac{1}{2})} \frac{1}{1+z} dz.$

   (b) $\int\limits_{K(-1,\frac{1}{2})} \frac{1}{1+z} dz.$

2. (a) $\int\limits_{K(0,\frac{1}{2})} \frac{1}{(1+z)^2} dz.$

   (b) $\int\limits_{K(-1,\frac{1}{2})} \frac{1}{(1+z)^2} dz.$

3. $\int\limits_{K(-1,\frac{1}{2})} \frac{1}{1+z^2} dz.$ $\int\limits_{K(0,\frac{1}{2})} \frac{1}{(1+z)^2} dz.$ $\int\limits_{K(i,\frac{1}{2})} \frac{1}{1+z^2} dz.$ $\int\limits_{K(0,\frac{3}{2})} \frac{1}{1+z^2} dz.$

4. $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+z} dz = \pi i.$

5. $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \pi e^{-1}.$

6. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3} dz = \frac{\pi}{2} i.$

7. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3} dz = \pi \sinh 1.$

8. $\int\limits_{|z|=1} \frac{tgz}{ze^{\frac{1}{z+2}}} dz = 0.$

9. $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)} dz = i\frac{2}{3}\pi \cosh \pi.$

10. $\int\limits_{|z|=5} \frac{1}{z^2+16} dz = 0.$

11. $\int\limits_{|z|=4} \frac{1}{(z^2+9)(z+9)} dz = -\frac{\pi}{45} i.$

12. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sinh \frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z} dz = \pi.$

13. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z} dz = 0.$

14. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = -\pi i.$

15. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sinh^2 z}{z^3} dz = 2\pi i.$

16. $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2(z-3)} dz = -\frac{\pi(\pi+2)\sqrt{2}}{8}.$

17. $\int\limits_{|z|=2} \frac{z \sinh z}{(z^2-1)^2} dz = 0.$

18. $\int\limits_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz = -\frac{\pi i}{27}.$

19. $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^3-4z^2} dz = -\frac{\pi^2}{2} \sinh 1.$

20. $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1} dz = \pi^3 i.$

21. $\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2} dz = \frac{2-i}{32} e^{-\frac{i}{2}}.$

22. $\int\limits_{|z|=2} \frac{1-\sin z}{z^2} dz = -2\pi i.$

23. $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{1+i}{2} e^i.$

2 Twierdzenie Cauchyego o residuach

Twierdzenie: Jeżeli f jest funkcją holomorficzną, za wyjątkiem skończonej liczby punktów z_r, $r = 1, ..., m$, wewnątrz i na brzegu obszaru D ograniczonego jedną krzywą zamkniętą C, zorientowaną dodatnio, bez punktów wielokrotnych, to

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{r=1}^{m} res_{z_r} f(z). \tag{3}$$

Przykład. Oblicz $\int\limits_C e^{\frac{1}{1-z}}dz$ po dowolnej krzywej zamkniętej C, zorientowanej dodatnio, bez punktów wielokrotnych, zawierającej w swoim wnętrzu punkt $z = 1$.

Rozwiązanie. Jedynym punktem osobliwym funkcji podcałkowej jest $z = 1$. Krzywą C możemy zastąpić przez okrąg $K(1, \epsilon)$ (dlaczego?). Podstawiając $\frac{1}{1-z}$ za z do wzoru

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{4}$$

otrzymujemy

$$e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}. \tag{5}$$

Punkt $z = 1$ jest biegunem rzędu nieskończonego, a residuum funkcji w tym punkcie wynosi -1.Ostatecznie $\int\limits_C e^{\frac{1}{1-z}}dz = -2\pi i$.

Przykład. Oblicz $\int\limits_{K(0,\epsilon)} \frac{1}{1-z} \sin \frac{1}{z} dz$, gdzie $K(0, \epsilon)$ jest okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu ϵ, $0 < \epsilon < 1$, zorientowanym dodatnio.

Rozwiązanie: Funkcja podcałkowa $f(z)$ jest iloczynem dwóch funkcji, z których jedna jest holomorficzna wewnątrz okręgu, a druga ma biegun rzędu nieskończonego w punkcie $z = 0$. Szukamy współczynnika a_{-1} jej szeregu Laurena. W tym celu rozwijamy oba czynniki w szeregi w otoczeniu punktu $z = 0$.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{r=0}^{\infty} z^r = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + ...$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{z} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)!} \frac{1}{z^{2s-1}} = \\ &\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{7!}\frac{1}{z^7} + \frac{1}{9!}\frac{1}{z^9} - \frac{1}{11!}\frac{1}{z^{11}} + ...\end{aligned}$$

Jak wiadomo, szeregi potęgowe mnożymy sumując wszystkie możliwe iloczyny wyrazów pierwszego szeregu przez wyrazy drugie i porządkując je według rosnacych potęg. Aby obliczyć współczynnik a_{-1} bierzemy pod uwagę tylko te iloczyny które są proporcjonalne do z^{-1}.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z} &= \frac{1}{z}(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}-\frac{1}{11!}+...)+reszta= \\ & \frac{1}{z}\sin 1+reszta\end{aligned}$$

Odpowiedź: $\int\limits_{K(0,\epsilon)} \frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i\sin 1.$

Przykład. Oblicz $\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}dz.$

Rozwiązanie: Funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcji, z których jedna posiada wewnątrz koła $\mid z+1\mid\leq\frac{1}{2}$ biegun rzędu nieskończonego. Każdy z czynników rozwijamy oddzielnie w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $z_0=-1$. Mamy

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-(z+1)}=-\left[1+(z+1)+(z+1)^2+(z+1)^3+(z+1)^4+...\right].$$

Różniczkując powyższy szereg dwukrotnie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{-1}{z^2} &= -\left[1+2(z+1)+3\,(z+1)^2+4\,(z+1)^3+5\,(z+1)^4+6(z+1)^5+...\right], \\ \frac{2}{z^3} &= -\left[2+3\cdot 2\,(z+1)+4\cdot 3\,(z+1)^2+5\cdot 4\,(z+1)^3+6\cdot 5(z+1)^4+...\right].\end{aligned}$$

$$\cos\frac{\pi}{z+1}=1-\frac{\pi^2}{2!}\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{\pi^4}{4!}\frac{1}{(z+1)^4}-\frac{\pi^6}{6!}\frac{1}{(z+1)^6}+\frac{\pi^8}{8!}\frac{1}{(z+1)^8}-....$$

Jak zwykle przy tego rodzaju operacjach, nie wykonujemy mnożeń liczb występujących we współczynnikach. Mnożąc otrzymane szeregi dostajemy

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}= \\ &\frac{1}{z+1}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[-\frac{3\cdot 2}{2!}\pi^2+\frac{5\cdot 4}{4!}\pi^4-\frac{7\cdot 6}{6!}\pi^6+\frac{9\cdot 8}{8!}\pi^8-...\right]+reszta= \\ &\qquad\frac{1}{z+1}\frac{1}{2}\left[\frac{3}{1!}\pi^2-\frac{5}{3!}\pi^4+\frac{7}{5!}\pi^6-\frac{9}{7!}\pi^8+\frac{11}{9!}\pi^{10}-...\right]+reszta.\end{aligned}$$

Zatem

$$\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}dz = i\pi\left[\frac{3}{1!}\pi^2 - \frac{5}{3!}\pi^4 + \frac{7}{5!}\pi^6 - \frac{9}{7!}\pi^8 + \frac{11}{9!}\pi^{10} - ...\right] =$$

$$i\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{(2n-1)!}\pi^{2n-1}.$$

Spróbujmy obliczyć sumę ostatniego szeregu. Zauważmy pewne podobieństwo do szeregu potęgowego funkcji $\sin z$. Mnożąc $\sin z$ przez z^2 otrzymujemy

$$z^2\sin z = z^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z^3 - \frac{z^5}{3!} + \frac{z^7}{5!} - \frac{z^9}{7!} + \frac{z^{11}}{9!} - ....$$

Różniczkując obustronnie mamy

$$2z\sin z + z^2\cos z = 3z^2 - \frac{5}{3!}z^4 + \frac{7}{5!}z^6 - \frac{9}{7!}z^8 + \frac{11}{9!}z^{10} - ....$$

Rozważane szeregi są zbieżne dla dowolnego z. Podstawiając $z = \pi$ otrzymujemy

$$-\pi^2 = 3\pi^2 - \frac{5}{3!}\pi^4 + \frac{7}{5!}\pi^6 - \frac{9}{7!}\pi^8 + \frac{11}{9!}\pi^{10} - ....$$

Odpowiedź: $\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}dz = -i\pi^3.$

Oblicz całki po okręgu $K(0,\epsilon)$ o środku w punkcie 0 i promieniu ϵ, $0 < \epsilon < 1$, zorientowanym dodatnio.

1. $\int\limits_{K(0,\epsilon)} \frac{1}{1+z}\sin\frac{1}{z}dz.$
2. $\int\limits_{K(0,\epsilon)} \frac{1}{1-z^2}\sin\frac{1}{z}dz.$
3. $\int\limits_{K(0,\epsilon)} \frac{1}{1-z^3}\sin\frac{1}{z}dz.$
4. $\int\limits_{K(0,\epsilon)} \frac{1}{1+z^3}\sin\frac{1}{z}dz.$
5. $\int\limits_{K(0,\epsilon)} \frac{1}{1-z^4}\sin\frac{1}{z}dz.$
6. $\int\limits_{K(0,\epsilon)} \frac{1}{1+z^4}\sin\frac{1}{z}dz.$
7. $\int\limits_{K(0,\epsilon)} \frac{1}{(1-z)^2}\sin\frac{1}{z}dz.$
8. $\int\limits_{K(0,\epsilon)} \frac{1}{1-z}\sin^2\frac{1}{z}dz.$

1) $2\pi i \sin 1$. 2) $2\pi i \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!}$ $=\sinh 1$. 3) $2\pi i(1 - \frac{1}{7!} + \frac{1}{13!} - \frac{1}{19!} + \frac{1}{25!} - ...) =$ $2\pi i \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(6m+1)!}$. 4) $2\pi i \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(6m+1)!}$. 5) $2\pi i \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(4m+1)!}$. 6) $2\pi i \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(4m+1)!}$.7) $2\pi i \cos 1$. 8) $\pi i(\cos 2 - 1)$.

9. $\int\limits_{K(a,\varepsilon)} \sin \frac{1}{(z-a)^n} dz = 0, \qquad n \geq 2.$

10. $\int\limits_{K(a,\varepsilon)} (z-a)^n \sin \frac{1}{(z-a)^{n+1}} dz = 2\pi i, \qquad n \in N.$

11. $\int\limits_{K(a,\varepsilon)} (z-a)^{2n+1} \cos \frac{1}{(z-a)^{n+1}} dz = -\pi i, \qquad n \in N \cup \{0\}.$

12. $\int\limits_{K(a,\varepsilon)} (z-a)^{2n} \sin \frac{1}{z-a} dz = (-1)^n \frac{2\pi i}{(2n+1)!}, \qquad n \in N \cup \{0\}.$

13. $\int\limits_{K(a,\varepsilon)} (z-a)^{2n-1} \cos \frac{1}{z-a} dz = (-1)^n \frac{2\pi i}{(2n)!}, \qquad n \in N \cup \{0\}.$

14. Problem: jak obliczyć całkę $\int\limits_{K(i,1)} \sin \frac{1}{1+z^2} dz$?