Zadania egzaminacyjne dla studiów zaocznych

Stanisław Ewert-Krzemieniewski

19.01.2006.

1. Dla podanych macierzy znajdź ich macierze odwrotne.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi:

$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\qquad B^{-1}$ nie istnieje,

$C^{-1} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} -3 & -15 & 14 \\ -3 & 18 & -8 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.

2. Oblicz wyznaczniki podanych macierzy wymiaru 3 i 4. Zaproponuj wzór na wyznacznik analogicznej macierzy wymiaru n.Znajdż macierze odwrotne do A i B.

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & K_2 & 0 \\ x_3 & 0 & K_3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & K_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & K_3 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & K_4 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi:

$\det A = x_1K_2K_3 - x_2^2K_3 - x_3^2K_2$,

$\det B = x_1K_2K_3K_4 - x_2^2K_3K_4 - x_3^2K_2K_4 - x_4^2K_2K_3$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} K_2K_3 & -x_2K_3 & -x_3K_2 \\ -x_2K_3 & x_1K_3 - x_3^2 & x_2x_3 \\ -x_3K_2 & x_2x_3 & x_1K_2 - x_2^2 \end{bmatrix},$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{bmatrix} K_2K_3K_4 & -x_2K_3K_4 & -K_2x_3K_4 & -K_2x_4K_3 \\ -x_2K_3K_4 & P_2 & x_3x_2K_4 & x_4x_2K_3 \\ -K_2x_3K_4 & x_3x_2K_4 & P_3 & x_4x_3K_2 \\ -K_2x_4K_3 & x_4x_2K_3 & x_4x_3K_2 & P_4 \end{bmatrix}, \text{.gdzie}$$

$P_2 = x_1K_3K_4 - x_3^2K_4 - x_4^2K_3$, $P_3 = x_1K_2K_4 - x_2^2K_4 - x_4^2K_2$, $P_4 = x_1K_2K_3 - x_2^2K_3 - x_3^2K_2$.

4. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 11 & 12 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$, Odpowiedź: $80c - 160b + 80a$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ a & b & c & d \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, Odpowiedź: $-48c + 16d + 48b - 16a$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, Odpowiedź: $12b - 12c + 4d - 4a$

d) $\begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ -1 & b & 3 & 2 \\ 3 & c & -2 & 1 \\ 2 & d & 1 & -3 \end{bmatrix}$, Odpowiedź: $48b + 30c - 42a$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & a \\ 3 & 1 & 2 & b \\ 2 & 4 & 1 & c \\ 4 & 2 & 4 & d \end{bmatrix}$, Odpowiedź: $-4d + 2b + 12c - 14a$

5. Znajdź macierz X spełniającą podane równanie macierzowe. Pamiętaj, że wynik mnożenia macierzy zależy od kolejności czynników - inaczej: mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Jeżeli chcesz obliczyć wartość wyrażenia $P(Q+R)$ lub $(P+Q)R$ to ZAWSZE najpierw spróbuj wykonać działanie w nawiasie.

a) $AX+B=C$,

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&2&-1\\2&1&-1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}2&-1&4\\3&3&2\\3&3&2\end{bmatrix}.$$

b) $XA+B=C$,

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&2&-1\\2&1&-1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}2&-1&3\\3&3&1\\4&2&2\end{bmatrix}.$$

c) $AX+B=C$,

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\1&2&0\\2&1&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2&-1&4\\3&3&2\\3&3&2\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}4&4&6\\8&5&7\\8&6&7\end{bmatrix}.$$

d) $AXB=C$,

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&2&0\\2&1&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&2\\2&3&0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}-5&-3&-2\\22&12&4\\23&13&6\end{bmatrix}.$$

e) $A+XB=C$,

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&2&0\\-2&1&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&2\\2&1&0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}5&-1&0\\10&3&2\\4&3&5\end{bmatrix}.$$

f) $XA+B=C$,

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&2&0\\-2&1&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}2&-4&1\\0&4&4\\4&2&1\end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi:

a) $X=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, b) $X=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, c) $X=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$,

d) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, e) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, f) $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Rozwiąż podane układy równań z parametrem a. Podaj ilość i postać rozwiązania w zależności od wartości przyjmowanych przez ten parametr. Podstawiając otrzymane wyniki do równań sprawdź poprawność rozwiązań.

a) $\begin{cases} ax + (3a-1)y = 2a \\ 4x + 5ay = 2a+4 \end{cases}$

Rozwiązanie.

Najpierw obliczamy wartości wyznacznika głównego W i wyznaczników pomocniczych W_x, W_y :

$W = \begin{vmatrix} a & 3a-1 \\ 4 & 5a \end{vmatrix} = 5a^2 - 12a + 4 = (5a-2)(a-2)$,

$W_x = \begin{vmatrix} 2a & 3a-1 \\ 2a+4 & 5a \end{vmatrix} = 4a^2 - 10a + 4 = 2(2a-1)(a-2)$,

$W_y = \begin{vmatrix} a & 2a \\ 4 & 2a+4 \end{vmatrix} = 2a^2 - 4a = 2a(a-2)$.

Aby ułatwić sobie dalsze rachunki, każdy wynik przedstawiliśmy w postaci iloczynu.

Przystępujemy do rozwiązywania układu.

(1) Załóżmy, że $W \neq 0$. Ma to miejsce gdy $(5a-2)(a-2) \neq 0$, czyli gdy $a \neq 2$ i $a \neq \frac{2}{5}$. Zgodnie z twierdzeniem, dla każdej wartości paramerty $a \neq 2$ i $a \neq \frac{2}{5}$ układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Jest nim para liczb (x, y), gdzie

$$x = \frac{2(2a-1)(a-2)}{(5a-2)(a-2)} = 2\frac{2a-1}{5a-2}, \qquad y = \frac{2a(a-2)}{(5a-2)(a-2)} = 2\frac{a}{5a-2}.$$

Wyłączone wartości parametru rozpatrujemy w kolejnych punktach, każdą oddzielnie.

(2) $a = \frac{2}{5}$. Podstawiając tą wartość parametru do W_x lub W_y stwierdzamy, że przyjmują one wartości różne od zera. Zatem układ nie posiada rozwiązań (jest sprzeczny).

(3) $a = 2$. Dla tej wartości parametru oba wyznaczniki są równe zeru. Aby stwierdzić, czy układ posiada rozwiązania i ewentualnie określić ich postać

podstawiamy $a = 2$ do układu. Otrzymujemy:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 5y & = & 4 \\ 4x & + & 10y & = & 8 \end{array} \right. .$$

Drugie z równań jest proporcjonalne do pierwszego, zatem odrzucamy je. Układ redukuje się do jednego równania:

$$2x + 5y = 4.$$

Rozwiązując ostatnie równanie wzgledem jednej ze zmiennych, np. y, otrzymujemy odpowiedź: dla $a = 2$ rozwiazaniem układu jest każda para liczb postaci

$$\left(x, \frac{4-2x}{5}\right),$$

gdzie x jest dowolną liczbą.

b) $\left\{ \begin{array}{rcrcl} ax & + & 2ay & = & a \\ 2ax & + & ay & = & 0 \end{array} \right.$. $\left\{x = -\frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3},\ a \neq 0\right\}$, $\{x \in R,\ y \in R,$ $a = 0\}$.

c) $\left\{ \begin{array}{rcrcr} ax & + & 2ay & = & a+1 \\ 2ax & + & ay & = & 0 \end{array} \right.$. $\left\{a \neq 0,\ x = -\frac{1}{3}\frac{a+1}{a},\ y = \frac{2}{3}\frac{a+1}{a}\right\}$.

d) $\left\{ \begin{array}{rcrcr} ax & + & 3ay & = & a+2 \\ ax & + & ay & = & 0 \end{array} \right.$. $\left\{a \neq 0,\ y = \frac{1}{2}\frac{a+2}{a},\ x = -\frac{1}{2}\frac{a+2}{a}\right\}$

e) $\left\{ \begin{array}{rcrcr} (a-1)x & + & (3a-4)y & = & a+1 \\ 2x & + & (a+2)y & = & 4 \end{array} \right.$.

$\left\{y = \frac{2}{a-2},\ x = \frac{a-6}{a-2},\ a \neq 2,\ a \neq 3\right\}$, $\left\{a = 3,\ y \in R,\ x = -\frac{5}{2}y + 2\right\}$.

f) $\left\{ \begin{array}{rcrcl} (a+1)x & + & (2a+2)y & = & a+1 \\ (a-1)x & + & ay & = & a-1 \end{array} \right.$.

$\{x = 1,\ y = 0,\ a \neq -1,\ a \neq 2\}$, $\{y = -2x - 2,\ x \in R,\ a = -1\}$,
$\left\{y = \frac{1-x}{2},\ a = 2\right\}$.

g) $\left\{ \begin{array}{rcrcr} ax & + & (a-3)y & = & a+3 \\ (a-4)x & + & 6ay & = & 2a+4 \end{array} \right.$ ..

$\left\{a \neq 1,\ a \neq -\frac{12}{5},\ y = \frac{12+a^2+5a}{(5a+12)(a-1)},\ x = 4\frac{5a+3+a^2}{(5a+12)(a-1)}\right\}$.

h) $\left\{\begin{array}{rcrcr} (a-1)x & + & (3a-4)y & = & a+1 \\ ax & + & (a+2)y & = & 4 \end{array}\right.$.

$\left\{a \neq 2,\ a \neq \frac{1}{2},\ y = \frac{4+a^2-3a}{(2a-1)(a-2)},\ x = -\frac{18+a^2-9a}{(2a-1)(a-2)}\right\}$.

i) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2(a-1)x & + & 2(a-1)y & = & 2 \\ ax & + & ay & = & 1 \end{array}\right.$.

Dla każdej wartości porametru a układ jest sprzeczny (nie posiada rozwiązań).

j) $\left\{\begin{array}{rcrcr} ax & + & y & = & a+1 \\ ax & + & ay & = & 1 \end{array}\right.$.

$\left\{a \neq 0,\ a \neq 1,\ x = \frac{a^2+a-1}{a(a-1)},\ y = \frac{-a}{a-1}\right\}$.

k) $\left\{\begin{array}{rcrcr} (a-1)x & + & (3-a)y & = & 5 \\ 2x & + & ay & = & 10 \end{array}\right.$.

$\{a \neq 2,\ a \neq -3,\ x = \frac{15}{a+3},\ y = \frac{10}{a+3}\}$, $\{a = 2,\ y = 5 - x,\ x \in R\}$.

l) $\left\{\begin{array}{rcrcr} (a-1)x & + & (3-a)y & = & 5 \\ 2x & + & ay & = & 5a \end{array}\right.$.

$\left\{a \neq 2,\ a \neq -3,\ x = \frac{5a}{a+3},\ y = \frac{5(a+1)}{a+3}\right\}$, $\{a = 2,\ y = 5 - x,\ x \in R\}$..

Dla pozostałych wartości parametru a, układy nie posiadają rozwiązań.

7. Rozwiąż podane układy równań. Dla niektórych z nich rozwiązanie może przyjąć rożne postacie. Po otrzymaniu własnego rozwiązania sprawdź, czy potrafisz otrzymać rozwiazanie takie jak w odpowiedzi.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 4y & - & 3z & - & 7t & = & -14 \\ -6x & - & 8y & - & 2z & + & 21t & = & 11 \end{array}\right.$.

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 4y & - & 3z & - & 7t & = & -14 \\ -2x & - & 8y & + & 6z & - & 14t & = & 11 \end{array}\right.$.

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 4y & - & 3z & + & 6t & = & -16 \\ -6x & - & 8y & + & 9z & - & 18t & = & -32 \end{array}\right.$.

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 4y & - & 2z & + & 4t & = & -16 \\ -6x & + & 8y & + & 9z & - & 18t & = & -32 \end{array}\right.$.

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 4y & - & z & + & 2t & = & -16 \\ -2x & - & 8y & + & 4z & - & 8t & = & 32 \end{array}\right.$.

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 4y & - & 3z & + & 6t & = & -16 \\ -6x & - & 8y & + & 9z & - & 18t & = & -32 \end{array}\right.$.

g) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 4y & - & 3z & + & 6t & = & -16 \\ -6x & - & 8y & + & 4z & - & 8t & = & -32 \end{array}\right.$.

h) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 4y & = & 12 \\ -2x & + & 3y & = & 2 \\ 5x & - & 2y & = & -6 \end{array}\right.$.

i) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & -8 \\ 3x & + & 3y & = & 15 \\ -5x & + & 2y & = & -4 \end{array}\right.$.

j) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & = & 11 \\ 2x & - & 5y & = & -27 \\ 3x & + & 2y & = & 7 \\ -5x & - & 7y & = & -30 \end{array}\right.$.

k) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 1 \\ -x & - & 5y & + & 2z & = & -4 \\ 3x & + & 8y & - & 6z & = & 5 \\ -5x & - & 11y & + & 10z & = & -6 \end{array}\right.$.

l) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -4x & + & 3y & - & 5z & = & -1 \\ -2x & - & 5y & + & 3z & = & -7 \\ 2x & + & 18y & - & 14z & = & 20 \end{array}\right.$.

m) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -5x & + & 3y & - & 5z & = & 1 \\ 3x & - & 5y & + & 3z & = & -7 \\ x & - & 7y & + & z & = & -13 \end{array}\right.$.

Odpowiedzi: a) $\left\{x = \frac{2}{5}z - \frac{39}{10} + \frac{7}{2}t,\ y = -\frac{11}{20}z + \frac{31}{20}\right\}$.
b) $\left\{x = -\frac{39}{4} + 3z,\ y = -\frac{7}{4}t + \frac{17}{16}\right\}$ lub $\left\{x = -\frac{39}{4} + 3z,\ t = -\frac{4}{7}y + \frac{17}{28}\right\}$ lub $\left\{t = -\frac{4}{7}y + \frac{17}{28},\ z = \frac{1}{3}x + \frac{13}{4}\right\}$.
c) $\left\{x = \frac{5}{4}z - \frac{5}{2}t,\ y = \frac{3}{16}z - \frac{3}{8}t + 4\right\}$,lub $\left\{x = \frac{20}{3}y - \frac{80}{3},\ z = \frac{16}{3}y + 2t - \frac{64}{3}\right\}$.
d) $\left\{t = \frac{32}{5} + \frac{1}{2}z,\ y = \frac{3}{4}x + \frac{52}{5}\right\}$ lub $\left\{x = \frac{4}{3}y - \frac{208}{15},\ z = -\frac{64}{5} + 2t\right\}$.
e) $\left\{y = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}, z = \frac{2}{3}x + \frac{32}{3} + 2t\right\}$ lub $\left\{x = \frac{3}{2}z - 3t - 16, y = \frac{1}{8}z - \frac{1}{4}t\right\}$.
h) układ sprzeczny. i) $\{x = 2,\ y = 3\}$. j) $\{x = -1,\ y = 5\}$, k) $\{x = 2z - 5,\ y = 1,\ z \in R\}$. l) $\left\{y = -\frac{11}{8}x + \frac{19}{8},\ z = -\frac{13}{8}x + \frac{13}{8},\ x \in R\right\}$. m) $\{x = -z + 1, y = 2,\ z \in R\}$.