Szeregi potęgowe - przykłady

Stanisław Ewert-Krzemieniewski

November 30, 2009

Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2-1}(x-2)^n.$$

Rozwiązanie. Większość kryteriów zbieżności szeregów jest sformułowana dla szeregów o wyrazach dodatnich. W szeregu funkcyjnym kolejne wyrazy mogą mieć różne znaki. Zatem stosując np. kryterium d'Alamberta **należy badać szereg utworzony z bezwzględnych wartości rozważanego szeregu**, to znaczy badać szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-3)^n}{n^2-1}(x-2)^n \right|.$$

Sposób 1. Przyjmijmy $a_n = \left| \frac{(-3)^n}{n^2-1}(x-2)^n \right|$. Wtedy

$$\lim_{n->\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3\left|x-2\right|.$$

Szereg będzie zbieżny dla tych x dla których $3\left|x-2\right| < 1$. Stąd $x \in (\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$.

Sposób 2. Przyjmijmy $b_n = \left| \frac{(-3)^n}{n^2-1} \right|$. Wtedy

$$\frac{1}{R} = \lim_{n->\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3,$$

gdzie R oznacza promień zbieżności. Ponieważ środkiem przedziału zbieżności jest $x_0 = 2$, otrzymujemy, jak poprzednio, $x \in (\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$.

Badamy teraz zbieżność szeregu na końcach przedziału. Dla $x = \frac{7}{3}$ otrzymujemy szereg liczbowy $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2-1}(\frac{1}{3})^n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$. Jest to szereg a) przemienny, b) o wyrazach monotonicznie malejących, c) o wyrazach malejących do zera. Te trzy warunki muszą być spełnione, aby można było zastosować kryterium Leibnitza.

Dla $x = \frac{5}{3}$ otrzymujemy $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2-1}(-\frac{1}{3})^n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$. Ten szereg nie jest przemienny! Jego zbieżność wynika z kryterium porównawczego ilorazowego, przez porównanie z szeregiem $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, bądź z kryterium porównawczego i nierówności $\frac{1}{n^2-1} < \frac{1}{(n-1)^2}$.

Odpowiedź. Szereg jest zbieżny dla $x \in < \frac{5}{3}, \frac{7}{3} >$.

Przykład 2. Dany jest szereg funkcyjny $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n-1}$. Zbadaj jego zbieżność. Oblicz $f"(x)$ i znajdź $f''(4x^2)$. Następnie oblicz $\int\limits_0^t f(x)dx$ dla t nalężącego do przedziału zbieżności. Zbadaj zbieżność otrzymanych szeregów.

Rozwiązanie. Przyjmując $a_n = \left|(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n-1}\right|$ i stosując kryterium d'Alamberta znajdujemy, że szereg jest zbieżny dla $x \in (-1, 1)$. Następnie obliczamy $f(1) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n-1}$ oraz $f(-1) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n-1} = -\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$. Pierwszy szereg jest szeregiem przemiennym, zbieżnym na podstawie kryterium Leibnitza. Drugi jest szeregiem harmonicznym, o którym wiadomo, że jest rozbieżny. Ostatecznie $x \in (-1, 1 >$.

Rozważany szereg jest szeregiem potęgowym, zbieżnym jednostajnie w każdym przedziale domkniętym zawartym w przedziale zbieżności. Podobnie szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n-1}\right]'$, utworzony z pochodnych wyrazów badanego szeregu. Mamy zatem równości

$$f'(x) = \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n-1}\right]' = \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n-1}\right]' = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n-1} x^{n-1}$$

oraz

$$f''(x) = \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n-1} x^{n-1}\right]' = \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \frac{n}{n-1} x^{n-1}\right]' = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-2}.$$

Zastępując w ostatnim wzorze x przez $4x^2$ otrzymujemy

$$f''(4x^2) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} n 4^n x^{2n-4}.$$

Przyjmując $a_n = \left|(-1)^{n-1} \frac{n}{n-1} x^{n-1}\right|$ i stosując kryterium d'Alamberta znajdujemy, że szereg $f'(x)$ jest zbieżny dla $x \in (-1, 1)$. Ponieważ $\lim\limits_{n->\infty} \frac{n}{n-1} = 1$, wyrazy szeregów liczbowych $f'(-1)$, $f'(1)$ nie spełniają warunku koniecznego zbieżności. Ostatecznie, szereg $f'(x)$ jest zbieżny tylko dla $x \in (-1, 1)$. Podobnie dla szeregu $f''(x)$. Na koniec, szereg $f''(4x^2)$ będzie zbieżny gdy $4x^2 \in (-1, 1)$. Wobec nierówności $0 \leq 4x^2 < 1$, otrzymujem $2|x| < 1$, a stąd wynika $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Ostatecznie, szereg $f''(4x^2)$ jest zbieżny dla $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Na koniec

$$\int\limits_0^t f(x)dx = \int\limits_0^t \left(\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n-1} \right) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} \int\limits_0^t x^n dx =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^t = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1} t^{n+1}.$$

Otrzymany szereg jest zbieżny dla $t \in < -1, 1 >$ (porównaj Przykład 1).