Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

December 14, 2010

Definicja. Niech A, B, a, p, q będa dowolnymi liczbami rzeczywistymi, a $n \in N$. Ułamkami prostymi nazywamy funkcje wymierne zmiennej rzeczywistej x postaci

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^2}, \quad \frac{A}{(x-a)^3}, \ldots, \frac{A}{(x-a)^n},$$

oraz

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^3}, \ldots, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

takie, że wielomianu x^2+px+q nie można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego o współczynnikach rzeczywistych. Oznacza to, że jego wyróżnik $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Sprawdź podane tożsamości, rozkładając funkcje wymierne po lewej stronie na ułamki proste.

1. $\frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x+3}$,
2. $\frac{x+1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+3)}$,
3. $\frac{x+1}{x(x^2+2x-3)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+3)} - \frac{1}{3x}$,
4. $\frac{x+2}{x^2(x-4)} = \frac{3}{8(x-4)} - \frac{3}{8x} - \frac{1}{2x^2}$,
5. $\frac{x+2}{x^2(x-4)^2} = \frac{3}{8(x-4)^2} - \frac{1}{8(x-4)} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2}$,
6. $\frac{x+2}{x(x-4)^2} = \frac{3}{2(x-4)^2} - \frac{1}{8(x-4)} + \frac{1}{8x}$,
7. $\frac{x+4}{x^3-x^2+x} = \frac{4}{x} - \frac{4x-5}{x^2-x+1}$,
8. $\frac{x-4}{x^3-x^2+2x} = \frac{2x-1}{x^2-x+2} - \frac{2}{x}$,
9. $\frac{x^2+4}{x^3-x^2+3x} = \frac{4}{3x} - \frac{\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}}{x^2-x+3}$,
10. $\frac{x^2+6x+4}{x^3-x^2+2x} = \frac{2}{x} - \frac{x-8}{x^2-x+2}$.