

# Wektory i wartości własne macierzy

Stanisław Ewert-Krzemieniewski

27.12.2012.

Dla podanych macierzy znajdź ich wartości własne i wektory własne.

1.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$ .
2.  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -1$ .
3.  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$ .
4.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -1$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3$ .
5.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$ .
6.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3$ .
7.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -1$ .
8.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -1$ .
9.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$ .
10.  $\begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & c & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$ .

11.  $\begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3.$
12.  $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{bmatrix} a-bc \\ 1 \\ -c \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2.$
13.  $\begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$
14.  $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 4.$
15.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 4, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2.$
16.  $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 4.$
17.  $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 4.$

Znajdź wielomian charakterystyczny oraz wartości własne i wektory własne podanych macierzy:

1.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X^2(X-1)^2, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1.$
2.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X^3(X-1), \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0.$
3.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X^2(X-1)(X+1),$   
 $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1.$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X^3(X-1), \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0.$$

$$5. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X - 2 = (X+1)(X-2)(X-1)^2,$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$$

$$6. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X^3(X-1), \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0.$$

$$7. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X - 1 = (-X + X^2 - 1)(X-1)^2,$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3} \\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-3} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5} +$$

$\frac{1}{2}$ .

$$8. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. X^2(X-1)(X-2),$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2.$$