

CAŁKI.

1. Obliczyć całki:

$$\text{a) } \int \left(3x^2 \cdot \sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \right) dx \quad \text{b) } \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[4]{x}} \right) dx \quad \text{c) } \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx \quad \text{d) } \int \frac{x^2}{x-1} dx \quad \text{e) } \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} \quad \text{f) } \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx .$$

2. Całkując przez części, obliczyć całki:

$$\text{a) } \int x^2 \cos x \, dx \quad \text{b) } \int x^2 e^x \, dx \quad \text{c) } \int x^4 \ln x \, dx \quad \text{d) } \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \text{e) } \int \frac{x}{\sin^2 x} dx \quad \text{f) } \int x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx \quad \text{g) } \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} dx .$$

3. Stosując podstawienia, wyznaczyć całki: a) $\int x \cdot e^{-x^2} dx$ b) $\int x \cdot \sqrt{4-x^2} dx$ c) $\int \frac{\cos x}{1+4\sin^2 x} dx$

$$\text{d) } \int \frac{\sqrt{5 \ln x + 7}}{x} dx \quad \text{e) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} dx \quad \text{f) } \int x^3 \sqrt{x^2+2} dx \quad \text{g) } \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad \text{h) } \int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dx \quad \text{i) } \int \frac{x+4}{\sqrt{x-2}} dx .$$

4. Znaleźć całki funkcji wymiernych: a) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$ b) $\int \frac{2x-3}{x^2-2x+5} dx$ c) $\int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx$ d) $\int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5} dx$

$$\text{e) } \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx \quad \text{f) } \int \frac{3x+2}{x^3-4x^2+4x} dx \quad \text{g) } \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx \quad \text{h) } \int \frac{dx}{x^4+2x^3+x^2} \quad \text{i) } \int \frac{dx}{x^4+5x^2+4} .$$

5. Obliczyć całki funkcji trygonometrycznych: a) $\int \sin^3 x \, dx$ b) $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$ c) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$

$$\text{d) } \int \operatorname{tg}^3 x \, dx \quad \text{e) } \int \frac{dx}{\sin x \cos x} \quad \text{f) } \int \frac{dx}{5-3\cos x} \quad \text{g) } \int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx \quad \text{h) } \int \frac{dx}{5+4\sin x} .$$

6. Obliczyć całki oznaczone: a) $\int_1^e \ln x \, dx$ [1] b) $\int_0^1 x^5 \sqrt{1+x^3} dx$ $\left[\frac{4(\sqrt{2}+1)}{45} \right]$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x \, dx$ $\left[\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right]$

$$\text{d) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx \quad \left[\frac{1}{2} \right] \quad \text{e) } \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad \left[\frac{\pi}{12} \right] \quad \text{f) } \int_3^6 \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} dx \quad \left[\frac{32}{3} \right] \quad \text{g) } \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx \quad [e - \sqrt{e}]$$

$$\text{h) } \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} \quad \left[\frac{\pi}{6} \right] \quad \text{i) } \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} \quad \left[\frac{\pi}{2} \right] \quad \text{j) } \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \quad [2\sqrt{2}-2] .$$

7. Znaleźć pole figury ograniczonej krzywymi: a) $y = 2x - x^2$ i $y = x - 2$ b) $y = \frac{3}{4}x^2 + 9$, $y = x^2$

$$\text{c) } y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2} \quad \text{d) } y^2 = x+1, y = x+1 \quad \text{e) } y = x, y = \frac{1}{x}, x = 3 \quad \text{f) } x \cdot y = 3, x + y = 4$$

$$\text{g) } y = x, y^2 + 3x = 4 \quad \text{h) } y = 2 - x^2, y = \sqrt[3]{x^2} .$$