

Egzamin z matematyki

rok I

Teoria

2 pkt. **Zadanie I.** Podać definicję pierwiastka stopnia n z liczby zespolonej z . Korzystając z definicji obliczyć

$$\sqrt[3]{-8}$$

2 pkt. **Zadanie II.** Podać definicję rzędu macierzy. Korzystając z definicji obliczyć

$$rz \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2 pkt. **Zadanie III.** Podać definicję granicy właściwej ciągu. Korzystając z definicji wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-2} = 0$$

2 pkt. **Zadanie IV.** Podać twierdzenie Darboux o miejscach zerowych funkcji. Korzystając z tego twierdzenia wskazać przedział o długości $\frac{1}{2}$, w którym równanie

$$3^x + x^3 = 0$$

ma rozwiązanie.

2 pkt. **Zadanie V.** Podać definicję pochodnej właściwej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 . Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$.

Zadania

2 pkt. **Zadanie 1.** Punkt $A(1, 2)$ jest jednym z wierzchołków sześciokąta foremnego o środku symetrii w punkcie $O(3, -1)$. Znaleźć pozostałe wierzchołki tego sześciokąta.

3 pkt. **Zadanie 2.** Rozwiązać układ równań macierzowych

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2 pkt. **Zadanie 3.** Rozwiązać układ równań liniowych.

$$\begin{cases} x + 4y + 2z - 3s = 2 \\ 2x + 9y + 5z + 2t + s = 3 \\ x + 3y + z - 2t - 9s = 3 \end{cases}$$

3 pkt. **Zadanie 4.** Znaleźć asymptoty funkcji

$$y = \frac{3}{2}x \ln \left(e - \frac{1}{3x} \right)$$

3 pkt. **Zadanie 5.** Wyprowadzić wzór na n -tą pochodną funkcji

$$y = \sin^2 x$$

i udowodnić go indukcyjnie.

1 pkt. **Zadanie 6.** Wykazać tożsamość

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$$

dla $x \in (-1, \infty)$

3 pkt. **Zadanie 7.** Zbadać monotoniczność i znaleźć ekstrema funkcji

$$y = x^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{x^2}{3}}$$

3 pkt. **Zadanie 8.** Obliczyć całki:

a. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

b. $\int \arcsin x dx$

c. $\int e^{-2x} \sin 4x dx$