

Egzamin poprawkowy z matematyki

rok I

Teoria

2 pkt. **Zadanie I.** Podać wzór na iloraz dwóch liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej oraz udowodnić go.

2 pkt. **Zadanie II.** Podać cztery własności wyznacznika macierzy. Rozwiązać nierówność

$$\det \begin{bmatrix} 3x - 5 & x - 2 & x - 3 \\ 2x + 1 & x - 1 & x + 2 \\ 3x + 2 & x - 1 & 2x + 3 \end{bmatrix} > 0$$

2 pkt. **Zadanie III.** Podać definicję asymptoty ukośnej prawostronnej funkcji. Korzystając z definicji pokazać, że prosta $y = x$ jest asymptotą prawostronną funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$.

2 pkt. **Zadanie IV.** Podać definicję pochodnej właściwej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 . Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

2 pkt. **Zadanie V.** Podać definicję minimum lokalnego funkcji. Korzystając z definicji uzasadnić, że funkcja

$$y = \sqrt[5]{x^2}$$

ma minimum lokalne w punkcie $x_0 = 0$.

Zadania

4 pkt. **Zadanie 1.** Rozwiązać równania w zbiorze liczb zespolonych

a. $z^3 = -4\bar{z}$

b. $z^3 + 3z^2 + 3z - 3 = 0$

Wskazówka: W przykładzie b. zastosować wzór $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2 pkt. **Zadanie 2.** Rozwiązać równanie macierzowe.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2 pkt. **Zadanie 3.** Rozwiązać układ równań liniowych.

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z + 2t + 3s = 1 \\ 3x + 2y + 4z + t + 2s = 3 \\ 3x + 2y - 2z + t = -7 \\ 9x + 6y + z + 3t + 2s = 2 \end{cases}$$

2 pkt. **Zadanie 4.** Znaleźć asymptoty funkcji

$$y = xe^{\frac{1}{x}}$$

3 pkt. **Zadanie 5.** Wyprowadzić wzór na n -tą pochodną funkcji

$$y = (3x + 1)e^x$$

i udowodnić go indukcyjnie.

2 pkt. **Zadanie 6.** Zbadać monotoniczność i znaleźć ekstrema funkcji

$$y = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$$

2 pkt. **Zadanie 7.** Zbadać wklęsłość i wypukłość oraz znaleźć punkty przegięcia funkcji

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2}$$

3 pkt. **Zadanie 8.** Obliczyć całki:

a. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

b. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

c. $\int e^{-2x} \cos 2x dx$