

# Egzamin z matematyki

## rok I

### Teoria

2 pkt. **Zadanie I.** Podać definicję macierzy odwrotnej. Korzystając z definicji obliczyć  $A^{-1}$ , jeżeli:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2 pkt. **Zadanie II.** Podać definicję układu Cramera. Dla jakich wartości parametru  $m$  podany układ równań liniowych jest układem Cramera.

$$\begin{cases} x + (m - 1)y + (m + 3)z = 1 \\ 2x + (m + 1)y + (3m + 3)z = 2 \\ x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

2 pkt. **Zadanie III.** Podać twierdzenie o trzech ciągach. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 9^n}$$

2 pkt. **Zadanie IV.** Podać twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej. Korzystając z tego twierdzenia wyprowadzić wzór na pochodną funkcji

$$y = \operatorname{arctg} x$$

2 pkt. **Zadanie V.** Podać definicję różniczki funkcji. Korzystając z tej definicji podać przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt[3]{8,02}$$

## Zadania

2 pkt. **Zadanie 1.** Obliczyć

$$1 + (1 - i\sqrt{3}) + (1 - i\sqrt{3})^2 + \dots + (1 - i\sqrt{3})^{11}$$

2 pkt. **Zadanie 2.** Znaleźć wszystkie liczby zespolone  $z$ , dla których macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & z^2 & 1 \\ z & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest odwracalna. Wyznaczyć  $A^{-1}$  dla  $z = i$ .

2 pkt. **Zadanie 3.** Rozwiązać układ równań liniowych.

$$\begin{cases} x + 4y + 2z - 3s = 2 \\ 2x + 9y + 5z + 2t + s = 3 \\ x + 3y + z - 2t - 9s = 3 \end{cases}$$

3 pkt. **Zadanie 4.** Znaleźć asymptoty funkcji

$$y = x \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$$

2 pkt. **Zadanie 5.** Dobrać parametry  $a$  i  $b$  tak, aby funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}} & \text{dla } x < 0 \\ b + 1 & \text{dla } x = 0 \\ \frac{1 - e^{ax}}{\operatorname{tg} x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie  $x_0 = 0$ .

3 pkt. **Zadanie 6.** Wyprowadzić wzór na  $n$ -tą pochodną funkcji

$$y = x \ln(3x)$$

i udowodnić go indukcyjnie.

3 pkt. **Zadanie 7.** Zbadać monotoniczność i znaleźć ekstrema funkcji

$$y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2}$$

3 pkt. **Zadanie 8.** Obliczyć całki:

a.  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

b.  $\int x^3 \ln x dx$

c.  $\int e^{-x} \sin 2x dx$