

FUNKCJE DWÓCH I TRZECH ZMIENNYCH.

1. Naszkicować wykresy funkcji dwóch zmiennych:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ c) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ d) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

2. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe I rzędu funkcji:

a) $f(x, y, z) = z \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$ b) $f(x, y, z) = x^{\frac{z}{y}}$ c) $f(x, y, z) = x^y - z^x$ d) $f(x, y) = \frac{1 - xy}{x + y}$

e) $f(x, y) = \sqrt{x} \cdot \ln(x^2 + y^2)$ f) $f(x, y) = e^{x^2} \sin xy$ g) $f(x, y, z) = x^{2y} \cdot z^{2x}$.

3. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu i sprawdzić, że pochodne mieszane są równe:

a) $f(x, y) = x^2 e^y - y \cos x$ b) $f(x, y) = x e^{xy}$ c) $f(x) = x \cdot \ln(x^2 + y^2)$.

4. Znaleźć ekstrema funkcji dwóch zmiennych:

a) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

d) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$ e) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$ f) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y$.

5. Wykorzystując różniczkę funkcji, znaleźć przybliżenia liczb i oszacować błąd przybliżenia:

a) $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$ b) $(1,04)^{2,03}$ c) $(1,04)^3 \cdot (0,95)^2$ d) $\sqrt[3]{(6,01)^3 - (2,98)^3 - (4,03)^3}$.