Granice. Ciągłość funkcji.

1. Obliczyć granice ciągów: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+6^n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^{n+1}+6^{n+2}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)!-(n+2)n!}{3(n-1)n!+4(n+1)!}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+\left[\sqrt{n^2+2n}\right]}{4n-3}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+\pi^{n-1}}{e^{n-1}-\pi^{n+1}}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{3\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}-2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}$; g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+\sin n}{3n-\cos n}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^{n}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{2n+1}+2^{3n+1}}{4\cdot 3^{2n}-3\cdot 2^{3n-1}}$ k) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arccot}(1-n^2)$ l) $\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)$ m) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi+2\arctan n^2}{3\pi-\operatorname{arccot}(n+1)}$ n) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{4}-1}{\sqrt[n]{6}-1}$ o) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-2)^3}{(2n-1)^2(5n+2)}$ p) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{3+8+13+\ldots+(5n-2)}$ r) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\ldots+(3n+1)}{2+6+10+\ldots(2n+4)}$ s) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)^n}{(n+1)^{2n}}$

2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji: a)$f(x)=\arcsin x^2$; b)$f(x)=\sqrt{1-\arctan x}$; c)$f(x)=\ln\left(2-|x|\right)$; d)$f(x)=\log_2\left(\frac{3x}{x^2-1}-2\right)$; e)$f(x)=\frac{x}{e^x-1}$; f)$f(x)=\sqrt{x-1}+\log_2\left(1-x^2\right)$; g)$f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-2}$; h)$f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-1}$; i)$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{2\sqrt{x}+1}$; j)$f(x)=\ln\left(x+1\right)-\ln\left(2x-3\right)$; k)$f(x)=\frac{3\cdot 4^x-2^x}{4^x-2^{x+1}}$.

3. Zbadać parzystość lub nieparzystość oraz różnowartościowość podanych funkcji: a) $f(x)=x^3\left|x\right|$; b)$f(x)=2x^4-x^2+1$; c)$f(x)=\arcsin\left(x^2-1\right)$; d)$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; e)$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$; f)$f(x)=4^x-2^{x+1}+2$; g)$f(x)=\ln(x^2+1)$

4. Wykazać, że: a) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$; b) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$; c) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.

5. Wykazać, że nie istnieje granica: a)$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}$; b)$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$; c)$\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$; d)$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{|x-1|}$; e)$\lim\limits_{x\to0}\arctan\frac{1}{x}$.

6. Obliczyć granice: a)$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ (odp:2); ą)$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$ (odp:$\frac{3}{2}$); b)$\lim\limits_{x\to5}\frac{125-x^3}{2x-10}$ (odp:$-\frac{75}{2}$); c)$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ (odp:-1); ć)$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4-16}{x^3-8}$ (odp:$\frac{8}{3}$); d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{2x^2+3x-2}$ (odp:$\frac{6}{5}$); e)$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}$ (odp:$\frac{3}{2}$); ę)$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-4x+3}{x^3-3x+2}$ (odp:2); f)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$(odp:$\frac{1}{2}$); g)$\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ (odp:$\frac{1}{4}$); h)$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$ (odp:$\frac{1}{32}$); i)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+9}-3}$ (odp:3); j)$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ (odp:$\frac{1}{3}$); k)$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ (odp:$\frac{4}{3}$); l)$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{\sqrt{7x+2}-4}$ (odp:$\frac{20}{21}$); ł)$\lim\limits_{x\to0}\frac{8^x-1}{4^x-1}$ (odp:$\frac{3}{2}$); m)$\lim\limits_{x\to}\frac{\cos x-1}{\sin 2x}$ (odp:0); n)$\lim\limits_{x\to0}\frac{x+2|x|}{2x-|x|}$; ń)$\lim\limits_{x\to0}\frac{|x+1|-1}{|x-1|-1}$ (odp:-1); o)$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{3x}}{e^{4x}-e^x}$ (odp:$-\frac{1}{3}$) ó) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3-1}{2x^4+x^2+1}$ (odp:0); p) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$ (odp:$+\infty$); q) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x}$ (odp:$-\frac{1}{2}$); r) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2+x+1}-x\right)$ (odp:$\frac{4}{3}$); s) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}}$ (odp: $\frac{1}{2}$); ś) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ (odp:$+\infty$); t) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x+5}\right)$ (odp:-2); u) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4^{2x+1}+1}{2^{4x+3}+3}$ (odp:$\frac{1}{2}$); w) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+3^x}{3+2^x}$ (odp:$\frac{1}{3}$); x) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^3}+1}$ (odp:0) y) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x^2+1}$ (odp:0); z) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(2x+3)-\ln(4x+5))$ (odp:$-\ln 2$); ź) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arcsin\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\arctan x}$ (odp:1).

7. Obliczyć granice: a)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$ (odp:1); ą)$\lim\limits_{x\to0}\frac{tg3x}{\sin 5x}$ (odp:$\frac{3}{5}$); b)$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (odp:$\frac{1}{2}$); c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$ (odp:$\frac{1}{\sqrt{2}}$); ć)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ (odp:2); d)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ (odp:4); e)$\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$ (odp:$\frac{1}{2}$); ę)$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}\right)$ (odp:0); f)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ (odp:$\frac{1}{4\sqrt{2}}$); g) $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\frac{\pi^2\sin\alpha}{\pi^2-\alpha^2}$ (odp:$\frac{\pi}{2}$); h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$ (odp:2); i) $\lim\limits_{x\to\beta}\frac{\sin^2 x-\sin^2\beta}{x^2-\beta^2}$

(odp:$\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$) j)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{5x}}{\sin 4x}$ (odp:$-\frac{1}{2}$); k)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{tgx}$ (odp:1); l)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2\frac{x}{2}}$ (odp:6); ł) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ (odp:e^2); m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^{x}$ (odp:0); n)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sin 3x}$ (odp:$\frac{4}{3}$); ń) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$ (odp:1); o)$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ (odp:e^2); ó)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-1}{6^x-1}$ (odp:$\frac{\ln 5}{\ln 6}$); p)$\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$ (odp:e); r)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-3^x}{5^x-e^x}$ (odp:$\frac{1-\ln 3}{\ln 5-1}$); s) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]$ (odp:a); ś)$\lim\limits_{x\to 0}(1+3tg^2x)^{ctg^2x}$ (odp:e^3); t) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\cos x)}{\ln(1+\cos 3x)}$ (odp:$-\frac{1}{3}$). u) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ (odp:1) v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$

8. Dla każdej z funkcji z zad.1 określić granice na końcach przedziałów określoności.

9. Dla każdej z określonych niżej funkcji wyznaczyć obiegranice jednostronne w punkce x_0, zbadać istnienie granicy w tym punkcie i naszkicować wykres funkcji:

   a) $f_1(x)=\begin{cases} x+1 & dla \quad x\le 0\\ -x+1 & dla \quad x>0\end{cases}$; $x_0=0$; b) $f_2(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & dla \quad x\le 2\\ x & dla \quad x>2\end{cases}$; $x_0=2$; c) $f_3(x)=\begin{cases} \arctan x & dla \quad x\le 1\\ \frac{1}{x} & dla \quad x>1\end{cases}$; $x_0=1$; d) $f_4(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{|x|} & dla \quad x\ne 0\\ 0 & dla \quad x=0\end{cases}$; $x_0=0$; e) $f_5(x)=\begin{cases} \sqrt{-x} & dla \quad x\le 0\\ \ln(1+x) & dla \quad x>0\end{cases}$; $x_0=0$; f) $f_5(x)=\begin{cases} \arcsin x & gdy \quad |x|\le 1\\ \frac{\pi x}{2} & gdy \quad |x|>1\end{cases}$; $x_0=-1$; g) $f(x)=x-[x]$; $x_0=0$;. h) $f(x)=[\cos x]$; $x_0=0$; i)$f(x)=2^{|x|}$; $x_0=0$.

10. Zbadaj ciągłość funkcji:

    a) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 5x}{x} & dla \quad x\ne 0\\ 5 & dla \quad x=0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} \arctan\frac{1}{x} & dla \quad x\ne 0\\ 1 & dla \quad x=0\end{cases}$;

    c) $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & dla \quad x\ne 0\\ 0 & dla \quad x=0\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} & dla \quad x\ne -1\\ 2 & dla \quad x=-1\end{cases}$; e) $f(x)=\begin{cases} \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & dla \quad x\ne 0\\ 0 & dla \quad x=0\end{cases}$;

    f) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & dla \quad x\ne 1\\ 2 & dla \quad x=1\end{cases}$; g) $f(x)=\begin{cases} 5-x & dla \quad x\le 0\\ x^2-3x+5 & dla \quad 0<x<2\\ x+1 & dla \quad x\ge 2\end{cases}$;

    h) $f(x)=\begin{cases} \arccos x & dla \quad x\in\langle -1,1\rangle\\ \sqrt{x^2-1} & dla \quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$; i)$f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x} & dla \quad x\le 0\\ \arcsin^2 x & dla \quad 0\le x\le 1\\ \frac{\sin\pi x}{2x} & dla \quad x>1\end{cases}$;

    j)$f(x)=\begin{cases} x^2-x & dla \quad x\le -2\\ \sqrt{4-x^2} & dla \quad -2<x\le 2\\ 2^x-3 & dla \quad x>2\end{cases}$

11. Dla jakich wartości parametru a funkcja f jest ciągła?

    a) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & dla \quad x<0\\ a & dla \quad x\ge 0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{2x} & dla \quad x<0\\ x+a & dla \quad x\ge 0\end{cases}$;

    c) $f(x)=\begin{cases} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x} & dla \quad x<-2\\ x^2+a & dla \quad x\ge -2\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-27}{3-x} & dla \quad x\ne 3\\ 2a+1 & dla \quad x=3\end{cases}$;

    e) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 3x}{e^{2x}-1} & dla \quad x\ne 0\\ a & dla \quad x=0\end{cases}$; f) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & dla \quad x\in(0,4)\\ ax & dla \quad x\in(-\infty,0\rangle\cup\langle 4,+\infty)\end{cases}$