

MACIERZE, WYZNACZNIKI, UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH.

1. Dane są macierze: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Znaleźć, jeśli istnieją, macierze

$C = A^T \cdot B$ i $D = A \cdot B^T$ oraz obliczyć ich wyznaczniki. Czy istnieją macierze odwrotne do C i D ? Jeśli tak, to wyznaczyć C^{-1} i D^{-1} .

2. Obliczyć wyznaczniki:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 7 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Znaleźć macierz odwrotną do: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ i sprawdzić wynik.

4. Wyznaczyć macierz X spełniającą poniższe równanie i sprawdzić wynik:

$$\text{a) } X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Rozwiązać i sprawdzić układy równań Cramera: a) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ x + 3y - z = 0 \\ -2x - 3y + z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 3u = -3 \\ 2x + y - 3u = 0 \\ -x - y = -1 \end{cases}$

6. Obliczyć rzędy macierzy: a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

7. Obliczając rzędy macierzy i stosując tw. Kroneckera - Capelliego, rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ x + 3y + 2z = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 4x - 8y + 2z = -2 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y - 4z = -3 \\ -2x - 2y + 8z = 6 \\ 5x + 5y - 20z = -15 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4u = 2 \\ 7x - 4y + z + 3u = 2 \\ 5x + 7y - 4z - 6u = -10 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ y - z + t = 0 \\ x - 2z + t = 0 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} y + z + 3t = 0 \\ 2x - z - 3t = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + z + 3t = 0 \end{cases}$$

8. Metodą Gaussa rozwiązać układ równań: a) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 5x - y + 3z = 3 \\ 7x - 2y + 4z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - y + t = 2 \\ 6x + 2y + z - t = -1 \\ 3x - y - 2z + t = 0 \end{cases}$