Powtórka - pochodne, zastosowania pochodnych.

1. Obliczyć pochodne: a) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2)}{1+\cos^3 x}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2-1}\cdot\ln^3 x$ c) $f(x)=\dfrac{e^{-x^3}}{\operatorname{tg}^2 4x}$ d) $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

e) $f(x)=\sqrt[3]{(x-5)^2}\cdot\operatorname{tg}^3 x$ f) $f(x)=\dfrac{\sin^4 x}{\operatorname{arcctg}(x^3)}$ g) $f(x)=\sqrt{\ln x}\cdot(3x^2+5)$ h) $f(x)=\dfrac{\cos^3 x}{\sqrt{4+\sin x}}$

i) $f(x)=(2+\ln^2 x)\cdot(\operatorname{ctg}\sqrt{x})$ j) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+e^{2x}}}{\sin^2 x}+\sqrt{x}\cdot\ln x$ k) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$ l) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}-\dfrac{1}{\ln^3 x}$.

2. Obliczyć drugą pochodną funkcji (wynik w najprostszej postaci) : a) $f(x)=\operatorname{tg} x$ b) $f(x)=x\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$

c) $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg} x$ d) $f(x)=\operatorname{arctg} e^{2x}$ e) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+2x-5}\right)$.

3. Sprawdzić, że funkcja $y=y(x)$ spełnia podane obok równanie: a) $y=\dfrac{x-5}{x+2}$; $2(y')^2=(y-1)\cdot y''$

b) $y=\sin e^x$; $y'-y''=e^{2x}y$ c) $y=e^{\sqrt{x}}$; $4xy''=y-2y'$ d) $y=\sqrt{2x-x^2}$; $y^3\cdot y''=-1$

4. Znaleźć dziedzinę, przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji:

a) $f(x)=x\cdot\ln^2 x$ b) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{\ln^3 x}{x}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+5\ln(x+6)$ e) $f(x)=x^2e^{-x^2}$.

5. Korzystając z tw. L`Hospitala, znaleźć granicę (w ramce [.] są odpowiedzi): a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-e^x-e^{-x}}{\cos x-1}$ $[2]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{e^x-e^{-x}}$ $[\frac{1}{2}]$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4e^{-x^4})$ $[0]$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln^2 x)$ $[0]$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$ $[0]$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}}{2\operatorname{arc\,tg} x-\pi}$ $[0]$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3\cdot e^{-3x})$ $[0]$.

6. Napisać wzór Maclaurina funkcji $f(x)=\ln(1-x)$ dla n = 4 . Wykorzystując ten wzór, obliczyć przybliżoną wartość $\ln\frac{4}{5}$, a następnie oszacować błąd przybliżenia.

7. Napisać wzór Maclaurina funkcji $f(x)=x\cdot e^x$ dla n = 5 . Wykorzystując ten wzór, obliczyć przybliżoną wartość $\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{e}$, a następnie oszacować błąd przybliżenia. .

Rozwiązania wybranych zadań:

1. g) $f(x)=\sqrt{\ln x}\cdot(3x^2+5)$, $f'(x)=\dfrac{3x^2+5}{2x\sqrt{\ln x}}+\sqrt{\ln x}\cdot 6x$.

l) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}-\dfrac{1}{\ln^3 x}$, $f'(x)=\dfrac{2\sin x\cos x\cdot\ln(\cos x)+\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}}{\ln^2(\cos x)}+\dfrac{3}{x\ln^4 x}$

2. c) $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg} x$, $f'(x)=\operatorname{arctg} x+\dfrac{x}{x^2+1}$, $f''(x)=\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$.

d) $f(x)=\operatorname{arctg} e^{2x}$, $f''(x)=\dfrac{4e^{2x}-4e^{6x}}{(1+e^{4x})^2}$ e) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+2x-5}\right)$, $f''(x)=\dfrac{-x^2-2x-7}{(x^2+2x-5)^2}$.

3. c) $y=e^{\sqrt{x}}$, $4xy''=y-2y'$; $y'=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $y''=\dfrac{e^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cdot 4x}$, $L=4xy''=\dfrac{e^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$,

$P=y-2y'=e^{\sqrt{x}}-\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, czyli $L=P$.

d) $y=\sqrt{2x-x^2}$; $y^3\cdot y''=-1$; $y''(x)=\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)'=\dfrac{-1}{(2x-x^2)\cdot\sqrt{2x-x^2}}$;

$L=\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3\cdot\dfrac{-1}{(2x-x^2)\cdot\sqrt{2x-x^2}}=-1$, czyli $L=P$.

4 b) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$; $D: x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln^2 x}{x^4}=\dfrac{2x\ln x(1-\ln x)}{x^4}$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ lub $x=e$,

x	$(0,1)$	1	$(1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	maleje	min	rośnie	max	maleje

$f_{min}=f(1)=0$, $f_{max}=f(e)=\dfrac{1}{e^2}$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}=0$ (granice nie są konieczne, służą tylko do narysowania wykresu) .

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+5\ln(x+6)$ [$D: x\in(-6,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{x^2+6x+5}{x+6}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-5$ lub $x=-1$,

x	(-6,-5)	-5	(-5,-1)	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	rośnie	max	maleje	min	rośnie

$f_{max}=f(-5)=\dfrac{25}{2}$; $f_{min}=f(-1)=\dfrac{1}{2}+5\ln 5$, $\lim\limits_{x\to-6}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$].

e) $f(x)=x^2e^{-x^2}$ [$D: x\in R$, $f'(x)=2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}(-2x)=e^{-x^2}2x(1-x^2)$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ lub $x=1$ lub $x=0$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	rośnie	max	maleje	min	rośnie	max	maleje

$f_{min}=f(0)=0$, $f_{max}=f(-1)=f(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{2x\cdot e^{x^2}}=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}=0$].

6. Wzór: $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4(\Theta x-1)^4}$; $\ln(\frac{4}{5})\approx-\frac{1}{5}-\frac{1}{50}-\frac{1}{375}=\frac{-150-15-2}{750}\approx-0{,}2226666..$,

$$\Delta=\left|\dfrac{-\frac{1}{625}}{4(\frac{\Theta}{5}-1)^4}\right|\le\dfrac{1}{4\cdot625}=0{,}0004$$

7. Wzór: $x\cdot e^x=x+x^2+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^4}{6}+\dfrac{5e^{\Theta x}+\Theta xe^{\Theta x}}{24}x^5$; $\frac{1}{3}\cdot e^{\frac{1}{3}}\approx\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27\cdot2}+\frac{1}{81\cdot6}=\frac{226}{486}\approx0{,}465020576$;

$$\Delta=\left|\dfrac{5e^{\frac{\Theta}{3}}+\frac{\Theta}{3}e^{\frac{\Theta}{3}}}{24}\cdot\dfrac{1}{243}\right|\le\dfrac{5}{24\cdot243}=\dfrac{5}{5832}\le0.001].$$