Elementy geometrii analitycznej w przestrzeni.

1. Sprawdzić, czy czworokąt $A(2, 5, -4)$, $B(6, -5, -3)$, $C(-1, -7, 5)$, $D(-5, 3, 4)$ jest równoległobokiem.

2. Dane są punkty $A(1, -5, 4)$ i $B(-4, 3, 7)$. Wyznaczyć równanie płaszczyzny zawierającej punkt A i prostopadłej do wektora $\overrightarrow{AB}$.

3. Wyznaczyć równanie płaszczyzny:
   a) przechodzącej przez punkty $A(2, -1, 3), B(3, 1, 2)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{v} = [-3, 1, 4]$;
   b) zawierającej punkty $A(4, 0, 1)$, $B(0, 0, 2)$, $C(2, 1, 2)$;
   c) przechodzącej przez punkty $M(2, -1, 4)$, $N(1, -1, 5)$ i prostopadłej do płaszczyzny $x - 2y + z - 1 = 0$;
   d) zawierającej punkt $A(1, 5, -2)$i oś OZ;
   e) przechodzącej przez punkt $M(3, -2, 5)$ i równoległej do płaszczyzny YOZ;
   f) równoległej do płaszczyzny $4x - 12y + 6z + 5 = 0$ i odległej od niej o 3;
   g) zawierającej prostą $l : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 2z = 2 \end{cases}$ oraz punkt $A(2, 3, -1)$;
   h) odcinającej na osiach OX i OY odcinki długości 3 i 2 odpowiednio oraz równoległej do wektora $\overrightarrow{u} = (2, 1, -1)$.

4. Obliczyć miarę kąta między płaszczyznami $\pi_1 : x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$ i $\pi_2 : x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$.

5. Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu $P(4, -1, 6)$ względem płaszczyzny $\pi : 2x - y + 3z - 7 = 0$

6. Przedstawić równanie prostej $l : \begin{cases} 3x - 2y + 5z - 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ w postaci kanonicznej i parametrycznej.

7. Znaleźć równanie prostej:
   a) przechodzącej przez punkt $A(2, -1, 3)$ i prostopadłej do płaszczyzn $\pi_1 : x + y + z = 0$ i $\pi_2 : x - y = 0$;
   b) przechodzącej przez punkt $A(2, 3, 1)$ oraz punkt przebicia płaszczyzny $4x - y + 3z + 8 = 0$ prosta$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}$;
   c) przechodzącej przez punkt $A(-2, 0, 1)$ oraz prostopadłej do prostej

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z}{2}$ i przecinającej prostą $x=y=z$;
d) przechodzacej przez punkt $A(2,3,1)$ oraz równoległej do płaszczyzny $x-y+7z=1$ i przecinającej prostą $\frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$;
e) odcinającej na osiach OX i OY odcinki o równych długościach (wyznaczyć wszystkie możliwe rozwiązania).

8. Zbadać wzajemne położenie prostych:
a) $l_1 : \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$ i $l_2 : \frac{x}{-2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{-6}$;
b) $l_1 : \begin{cases} 2x+z+3=0 \\ 2x-y+3z-5=0 \end{cases}$ i $l_2 : \begin{cases} 2y+3z-3=0 \\ x-4y+z-2=0 \end{cases}$;
c) $l_1 : \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{5}$ i $l_2 : \frac{x}{3}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+1}{2}$.

9. Wyznaczyć równanie płaszczyzny zawierającej proste
a) $l_1 : \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ i $l_2 : \frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{3}$:
b) $l_1 : \frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$ i $l_2 : \begin{cases} x=1-2t \\ y=3t \\ z=3+t \end{cases}$

10. Znaleźć rzut (prostokątny) punktu $P(1,0,-2)$
a) na prostą $l : \begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$;
b) na płaszczyznę $\pi : 2x-y-3z-3=0$.

11. Zbadać wzajemne położenie prostej l i płaszczyzny π, jeżeli:
a) $l : \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{1}$ i $\pi : x-y+z+4=0$;
b) $l : \begin{cases} x-y-2z+3=0 \\ 3x-2y+2=0 \end{cases}$ i $\pi : 4x-3y-2z-4=0$.

12. Wyznaczyć rzut prostej l na płaszczyznę $\pi : x-y+4z-2=0$, jeżeli prosta l dana jest równaniem:
a) $l : \frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{8}$;
b) $l : \begin{cases} x-y+z-3=0 \\ 2x+3y-2z-5=0 \end{cases}$.

13. Dany jest punkt $P(6;2;9)$ i prosta $l : \frac{x+7}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+6}{4}$. Znaleźć punkt $P\prime$ symetryczny do punktu P względem prostej l.

14. Sprawdzić, czy punkty $P(1,2,-3)$ i $Q(2,5,-3)$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\pi : 2x-y-z+6=0$.