Przewodnik do ćwiczeń

Lista numer 5

Szeregi o wyrazach dowolnych

Definicja

Szereg

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad ; \quad a_n > 0$$

nazywamy szeregiem *naprzemiennym* ●

Przykład 1

Szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ jest szeregiem naprzemiennym .

Twierdzenie 1 (kryterium Leibniza)

Jeżeli dla każdego $n \in N$, $a_n \geq a_{n+1}$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ to szereg

naprzemienny (1) jest zbieżny ●

Przykład 2

Szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ jest zbieżny ponieważ :

dla każdego $n \in N$, $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Definicja 2

Szereg zbieżny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazywamy *bezwzględnie zbieżnym,* jeżeli zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \quad \bullet$$

Przykład 3

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest zbieżny na podstawie kryterium Leibniza ponieważ :

dla każdego $n \in N$, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n > \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = a_{n+1}$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest zbieżnym szeregiem geometrycznym,

zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest bezwzględnie zbieżny .

Definicja 3

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

nazywamy *warunkowo zbieżnym* jeżeli , szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

jest rozbieżny $\bullet$

Przykład 4

Szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ jest szeregiem warunkowo zbieżnym ,

ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest szeregiem rozbieżnym .

Twierdzenie 1

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest zbieżny to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest też zbieżny .

Zadanie

Zbadaj zbieżność następujących szeregów :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ (zbieżny bezwzględnie)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+5}{2n-1}$ (rozbieżny)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (zbieżny warunkowo)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$ (rozbieżny)

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$ (zbieżny bezwzględnie)

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x}{n^2}$ (zbieżny bezwzględnie)

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} tg \frac{1}{n\sqrt{n}}$ (zbieżny bezwzględnie)

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$ (zbieżny bezwzględnie)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{n^n}$ (zbieżny bezwzględnie)