

Zadania domowe dla I-roku MUZ-Informatyka

Całki – powtórzenie i całki niewłaściwe

1. Obliczyć całki stosując metodę podstawiania

a) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$ b) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ c) $\int \operatorname{tg} x dx$ d) $\int x^2 e^{-x^3} dx$ e) $\int \frac{x^2}{x^6 + 4} dx$

Odp: a) $3\sqrt[3]{\sin x} + C$, b) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C$, c) $-\ln|\cos x| + C$, d) $-\frac{1}{3}e^{-x^2} + C$ e) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C$.

2. Obliczyć całki stosując metodę całkowania przez części

a) $\int \arccos x dx$ b) $\int x \operatorname{arctg} x dx$ c) $\int x^2 \ln(x+1) dx$ d) $\int \ln^2 x dx$ e) $\int x^2 e^{-x} dx$

Odp: a) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$ b) $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C$, c)

$\frac{1}{3}(x^2+1)\ln(x-1) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + C$ d) $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$ e) $C - e^{-x}(2+2x+x^2)$

3. Obliczyć całki niewłaściwe I-rodzaju

a) $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ b) $\int_{-\infty}^4 \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$, c) $\int_6^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$, d) $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)^2} dx$ e) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$

Odp: a) rozbieżna b) $\frac{3}{4}\pi$, c) $-\frac{1}{4}\ln \frac{1}{5}$, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{1}{2}$.

4. Obliczyć całki niewłaściwe II-go rodzaju

a) $\int_2^5 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$, b) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$, c) $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$, d) $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln x}$, e) $\int_{-1}^0 \frac{e^x}{x^2} dx$

Odp: a) $-\infty$, b) $\frac{8}{3}$, c) 1, d) ∞ e) $\frac{1}{e}$.