SZEREGI LICZBOWE.

1. Powołując się na warunek konieczny zbieżności wykazać, że poniższe szeregi są rozbieżne:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 2^n + 1}{3^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$.

2. Znaleźć sumę częściową, wykazać zbieżność i obliczyć sumę szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Wykorzystując ten fakt oraz kryterium porównacze wykazać, że szereg: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. (Wskazówka: wyrażenie $\frac{1}{k(k+1)}$ rozłożyć na ułamki proste).

3. Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^n}{n^n}$, a>0.

4. Stosując kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n^2)^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

5. Zdadać rodzaj zbieżności (bezwzględna czy warunkowa) następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n + 4}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{4n+2}\right)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+4}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4^n}$.

SZEREGI POTĘGOWE, SZEREG MACLAURINA.

1. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$.

2. Wyznaczyć przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, p>0 d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^n}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{6^n} x^n$.

3. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu i całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumy następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n (n+1)}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n 5^n}$.

4. Znaleźć szeregi Maclaurina następujących funkcji, określić promień zbieżności otrzymanych szeregów:

a) $f(x) = \frac{2}{2+3x}$ b) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

d) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ e) $f(x) = e^{-x^2}$ f) $f(x) = \ln(1-x)$.