Wektory

1. Obliczyć długość przekątnych równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}$, gdzie $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ są wektorami jednostkowymi tworzącymi kąt $\alpha = \frac{\pi}{3}$. ($d_1 = \sqrt{7}$, $d_2 = \sqrt{13}$)

2. Obliczyć kąt między wektorami $\overrightarrow{p} = 6\overrightarrow{m} + 4\overrightarrow{n}$ i $\overrightarrow{q} = 2\overrightarrow{m} + 10\overrightarrow{n}$, jeżeli wiadomo, że $\overrightarrow{m}$ i $\overrightarrow{n}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.($\alpha = \frac{\pi}{4}$)

3. Znaleźć rzut wektora $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$ na oś o kierunku wektora $\overrightarrow{w} = 6\overrightarrow{m} - 2\overrightarrow{n}$, jeżeli wiadomo, że $\overrightarrow{m}$ i $\overrightarrow{n}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi. ($\overrightarrow{u'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{w}$)

4. Dany jest wektor $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$, gdzie $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi. Wyznaczyć wektor $\overrightarrow{w}$ o długości $\sqrt{5}$ prostopadły do wektora $\overrightarrow{u}$ i leżący w płaszczyźnie wektorów $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$. ($\overrightarrow{w_1} = 2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{w_2} = 2\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$)

5. Uprościć wyrażenia:

   (a) $\overrightarrow{p} \times (2\overrightarrow{q} - \overrightarrow{r} + \overrightarrow{p}) + (2\overrightarrow{r} + \overrightarrow{q}) \times (\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{r})$ (odp: $-2\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}$)

   (b) $(\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}) \times (3\overrightarrow{r} + \overrightarrow{p}) + (2\overrightarrow{q} - 3\overrightarrow{r}) \times (3\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q})$ (odp: $-9\overrightarrow{r} - 12\overrightarrow{q}$)

   gdzie $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}$ są trójką wektorów jednostkowych wzajemnie prostopadłych mających orientację zgodną z orientacją przestrzeni.

6. Obliczyć $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$, wiedząc, że $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 6$, $|\overrightarrow{u}| = 2$, $|\overrightarrow{v}| = 5$. (odp: 8)

7. Wyznaczyć miarę kąta między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, jeżeli $(\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \perp (7\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v})$ i $(\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}) \perp (7\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})$. (Odp: $\frac{\pi}{3}$ lub $\frac{2\pi}{3}$)

8. Wyznaczyć miarę kąta między wektorami jednostkowymi $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, wiedząc, że $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \perp (-4\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{v})$. (odp: $\frac{\pi}{3}$)

9. Uprościć wyrażenia: $(p - 2\overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}) \times (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} + 2\overrightarrow{r})$, gdzie $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}$ są trójką wektorów wzajemnie prostopadłych mających orientację zgodną z orientacją przestrzeni oraz $|\overrightarrow{p}| = |\overrightarrow{q}| = |\overrightarrow{r}| = 2$.

10. Wiedząc, że pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ jest równe 2 obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{m} = 2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$ i $\overrightarrow{n} = 2\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}$. ($P = 16$)

11. Obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ wiedząc, że pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$ i $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$ jest wówne 12. ($P = 2$)

12. Znaleźć rzut wektora $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} - 2\overrightarrow{r}$ na oś o kierunku wektora $\overrightarrow{w} = (3\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}) \times (2\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} - \overrightarrow{r})$, gdzie $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}. \overrightarrow{r}$ jest trójką wektorów jednostkowych wzajemnie prostopadłych mających orientację zgodną z orientacja przestrzeni. ($\overrightarrow{a'} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{q} + \overrightarrow{r})$)

13. Obliczyć wysokość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q} - 5\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} + 4\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}$, jeżeli za podstawę wzięto równoległobok zbudowany na wektorach $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ oraz $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi. ($h = \frac{49}{\sqrt{323}}$)

14. Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ jest równa 3. Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} - \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q} - 3\overrightarrow{r}$. ($V = \frac{3}{2}$)

15. Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ i $\overrightarrow{p}$, jeżeli wiadomo, że objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{m} - \overrightarrow{n} - \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} - 3\overrightarrow{p}$ jest równa 48. ($V = 4$)

16. Wyznaczyć przekątne równoległoboku $ABCD$ zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{AB} = [3, -2, 1]$ i $\overrightarrow{AC} = [0, 3, -1]$.

17. Wyznaczyć współrzędne wektora jednostkowego równoległego do wektora $\overrightarrow{a} = [3, -2, 1]$.

18. Uprościć wyrażenie $\overrightarrow{u}^2 + 3\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} + 1$ jeżeli $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{p} + 2\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}$, $|\overrightarrow{p}| = 4$, $|\overrightarrow{q}| = 1$, $\measuredangle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = \frac{\pi}{2}$. (392)

19. Znaleźć miarę kąta między przekątnymi równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{u} = [2, 1, -1]$, $\overrightarrow{v} = [1, 1, 2]$ ($\frac{\pi}{2}$)

20. Znaleźć miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (2, -1, 3)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (0, 0, 5)$.

21. Wektory $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ mają wspólny początek, wektory $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ są bokami trójkąta, zaś $\overrightarrow{r}$ jest jego środkową. Wykazać, że $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} + \overrightarrow{q} \times \overrightarrow{r} + \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$.

22. Obliczyć tangens kąta między wektorami $\overrightarrow{u} = [0, 1, 2]$ i $\overrightarrow{v} = [2, -1, 0]$. ($-2\sqrt{6}$)

23. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (3, 4, -3)$, $B = (6, 2, 3)$, $C = (0, -1, 5)$. ($\frac{49}{2}$)

24. Znaleźć wektor jednostkowy prostopadły do wektorów $\overrightarrow{u} = [2, -1, 1]$ i $\overrightarrow{v} = [1, 2 - 1]$. ($\overrightarrow{m} = \pm\frac{\sqrt{35}}{35}[-1, 3, 5]$)

25. Sprawdzić, czy wektory $\overrightarrow{p} = [3, -2, 1]$, $\overrightarrow{q} = [2, 1, 2]$, $\overrightarrow{r} = [3, -1, -2]$ są komplanarne.

26. Dany jest caworościan o wierzchołkach w punktach $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 4, 1)$, $C = (1, 1, 7)$, $D = (3, 4, 9)$. Obliczyć objętość oraz wysokość poprowadzoną z wierzchołka D. ($h_D = \sqrt{14}$, $V = 14$)

27. Objetość czworościanu $ABCD$ o wierzchołkach $A = (2, 0, -1)$, $B = (3, -1, 1)$, $C = (2, -2, 3)$ jest równa 5. Znaleźć współrzędne wierzchołka D wiedząc, że leży on na osi OY. ($D = (0, -8, 0)$ lub $D = (0, 7, 0)$)

28. Wykazać, że punkty $A = (1, 2 - 1)$, $B = (0, 1, 5)$, $C = (-1, 2, 1)$ i $D = (2, 1, 5)$ nie leżą w jednej płaszczyźnie.

29. Wyznaczyć współrzędne punktu B wiedząc, że $A(3, -2, 1)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 14$ i cosinusy kierunkowe wektora $\overrightarrow{AB}$ wynoszą: $\frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}$.