1 Struktury algebraiczne

1.1 Grupa

Definicja 1.1 Działaniem w zbiorze niepustym A nazywamy każde odwzorowanie
$$f : A \times A \to A.$$

Definicja 1.2 Działanie $\circ$ określone w zbiorze A jest łączne, jeżeli
$$\forall_{a,b,c \in A} \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Definicja 1.3 Działanie $\circ$ określone w zbiorze A jest przemienne, jeżeli
$$\forall_{a,b \in A} \quad a \circ b = b \circ a.$$

Definicja 1.4 Element $e \in A$ nazywa się elementem neutralnym działania $\circ$, jeżeli
$$\forall_{a \in A} \quad a \circ e = e \circ a = a.$$

Definicja 1.5 Niech działanie $\circ$ określone w zbiorze A posiada element neutralny e. Element $a' \in A$ nazywamy elementem odwrotnym do elementu $a \in A$, jeżeli
$$a \circ a' = a' \circ a = e.$$

Definicja 1.6 Zbiór V, w którym określone jest działanie $\circ$, nazywamy grupą, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. działanie $\circ$ jest łączne
2. istnieje element neutralny $e \in V$ działania $\circ$
3. dla każdego $a \in V$ istnieje element odwrotny

Definicja 1.7 Grupa, w której działanie jest przemienne, nazywa się grupą abelową (przemienną).

1.2 Ciało

Definicja 1.8 Niech dany będzie zbiór A z dwoma działaniami $\oplus, \odot$. Mówimy, że działanie $\odot$ jest rozdzielne względem działania $\oplus$, jeżeli

$$\forall_{a,b,c \in A} \quad a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \wedge$$
$$\wedge (b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$$

Definicja 1.9 Zbiór V, w którym określone są dwa działania $\oplus, \odot$, nazywamy ciałem, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. V jest grupą abelową względem działania $\oplus$
2. $V \backslash \{e_\oplus\}$ jest grupą względem działania $\odot$
3. działanie $\odot$ jest rozdzielne względem działania $\oplus$

2 Ciało liczb zespolonych

Definicja 2.1 Rozważmy zbiór $C = R \times R$. W zbiorze C określamy dwa działania $\oplus, \odot$, które będziemy nazywali dodawaniem i mnożeniem:

1. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$
2. $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$,

gdzie działania po prawych stronach równości są zwykłymi działaniami na liczbach rzeczywistych. Elementy zbioru C, w którym określone są działania $\oplus, \odot$, będziemy nazywali liczbami zespolonymi, a zbiór C zbiorem liczb zespolonych.

Twierdzenie 2.1 Zbiór liczb zespolonych jest ciałem względem działań $\oplus, \odot$.

Definicja 2.2 Niech $z = a + bi$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Liczbę sprzężoną z liczbą z nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z} = a - bi$.

Twierdzenie 2.2

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$.

Definicja 2.3 Niech $z = a + bi$. Modułem liczby zespolonej z, który oznaczamy przez $|z|$, nazywamy liczbę rzeczywistą $\sqrt{a^2 + b^2}$

Twierdzenie 2.3 Niech

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

oraz

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Wówczas

1. $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$,
   tzn. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ oraz $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$,
   tzn. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ oraz $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Definicja 2.4 (wzór de Moivre'a)

$$[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Definicja 2.5 Niech $n \in N$. Pierwiastkiem stopnia n liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w o tej własności, że

$$w^n = z$$

Twierdzenie 2.4 Każda różna od zera liczba zespolona $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n postaci:

$$\sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$
$$= \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),$$

gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Twierdzenie 2.5 Jeżeli w_k, gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$, są pierwiastkami stopnia n z liczby z, to

$$w_k = w_0\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

3 Wielomiany

Definicja 3.1 Wielomianem rzeczywistym (zespolonym) stopnia $n \in N \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W : R \longrightarrow R$
($W : C \longrightarrow C$) określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_k \in R$ ($a_k \in C$) dla $0 \leq k \leq n$ oraz $a_n \neq 0$. Liczby a_k nazywamy współczynnikami wielomianu W.

Definicja 3.2 Mówimy, że wielomian S jest ilorazem, a wielomian R resztą z dzielenia wielomiany P przez wielomian Q, jeżeli dla każdego $x \in R$ ($x \in C$) spełniony jest warunek

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$$

oraz stopień reszty R jest mniejszy od stopnia dzielnika Q. Jeżeli $R(x) \equiv 0$ to mówimy, że wielomian P jest podzielny przez wielomian Q.

Definicja 3.3 Liczbę rzeczywistą (zespoloną) x_0 nazywamy pierwiastkiem rzeczywistym (zespolonym) wielomianu W, jeżeli $W(x_0) = 0$.

Twierdzenie 3.1 (*Bézout*) Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian P taki, że

$$W(x) = (x - x_0)P(x)$$

Definicja 3.4 Liczba x_0 jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian P taki, że

$$W(x) = (x - x_0)^k P(x)$$

oraz $P(x_0) \neq 0$

Twierdzenie 3.2 Niech

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych oraz niech liczba całkowita $p \neq 0$ będzie pierwiastkiem wielomianu. Wtedy p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Twierdzenie 3.3 Niech

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych stopnia n oraz niech liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, będzie pierwiastkiem wielomianu W. Wtedy p jest dzielnikiem współczynnika a_0 a q jest dzielnikiem współczynnika a_n tego wielomianu.

Twierdzenie 3.4 Każdy wielomian stopnia $n \in N$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (uwzględniając pierwiastki wielokrotne).

Twierdzenie 3.5 Niech W będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba zespolona z_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\overline{z_0}$ jest pierwiastkiem k-krotnym tego wielomianu.

Definicja 3.5 Funkcją wymierną rzeczywistą nazywamy iloraz dwóch wielomianów rzeczywistych.

Definicja 3.6 Funkcje wymierną nazywamy właściwą, jeżeli stopień wielomianu w liczniku ułamka określającego tę funkcję jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku.

Definicja 3.7 (*ułamki proste*)

1. Rzeczywistym ułamkiem prostym pierwszego rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci
$$\frac{A}{(x+a)^n}$$
gdzie $a, A \in R, n \in N$
2. Rzeczywistym ułamkiem prostym drugiego rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci
$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$
gdzie $p, q, A, B \in R, n \in N$ przy czym
$\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Twierdzenie 3.6 Każda funkcja wymierna właściwa rzeczywista jest sumą rzeczywistych ułamków prostych. Przedstawienie to jest jednoznaczne. Rzeczywista funkcja wymierna właściwa
$$\frac{P(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}$$
jest sumą $k_1+k_2+\dots+k_r$ rzeczywistych ułamków prostych I rodzaju oraz $l_1+l_2+\dots+l_s$ rzeczywistych ułamków prostych II rodzaju, przy czym

1. czynnikowi $(x-x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych I rodzaju postaci:
$$\frac{A_1}{x-x_i}+\frac{A_2}{(x-x_i)^2}+\dots+\frac{A_{k_i}}{(x-x_i)^{k_i}},$$
gdzie $A_1, A_2, \dots, A_{k_i} \in R$ dla $1 \le i \le r$.
2. czynnikowi $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych II rodzaju postaci:
$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_jx+q_j)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\dots+\frac{B_{l_j}x+C_{l_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}},$$
gdzie $B_1, B_2, \dots, B_{l_j}, C_1, C_2, \dots, C_{l_j} \in R$
dla $1 \le i \le s$.

4 Macierze i wyznaczniki

Definicja 4.1 Niech K oznacza ciało, $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Funkcja $A : M \times N \longrightarrow K$ nazywa się macierzą prostokątną (krótko macierzą) nad ciałem K o m wierszach i n kolumnach. Będziemy pisali macierz w postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

i oznaczal przez $[a_{ij}]_{m\times n}$, gdzie $a_{ij} \in K$. Skalary a_{ij} nazywamy wyrazami lub elementami danej macierzy.

Definicja 4.2 Główną przekątną macierzy $[a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy ciąg elementów $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ss})$, gdzie $s = \min\{m, n\}$.

Definicja 4.3 (*rodzaje macierzy*)

1. Macierz wymiaru $m \times n$, której wszystkie elementy są równe 0, nazywamy macierzą zerową wymiaru $m \times n$ i oznaczamy przez $\mathrm{O}_{m\times n}$ lub O, gdy znamy jej wymiar.

$$\mathrm{O}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

2. Macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$, w której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są równe 0, nazywamy macierzą dolnotrójkątną. Podobnie określa się macierz górnotrójkątną.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. Macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$, będąca jednocześnie macierzą dolnotrójkątną jak i górnotrójkątną, nazywana jest macierzą diagonalną.
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
4. Macierz diagonalną, w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1, nazywamy macierzą jednostkową i oznaczamy przez I_n lub I, gdy znamy jej stopień.
$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

4.1 Działania na macierzach

Definicja 4.4 Dodawaniem macierzy nazywamy działanie w zbiorze $M_{m\times n}(K)$ określone w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tak więc $[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Twierdzenie 4.1 Zbiór $M_{m\times n}(K)$ z dodawaniem macierzy jest grupą abelową.

Definicja 4.5 Mnożeniem macierzy przez skalar nazywamy działanie zewnętrzne

$$\cdot : K \times M_{m\times n}(K) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$$

określone w następujący sposób:

$$\lambda \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [\lambda \cdot a_{ij}]_{m\times n}$$

Zatem

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 4.2 Struktura algebraiczna $(M_{m\times n}(K), K, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową.

Definicja 4.6 Niech będą dane dwie macierze nad ciałem K: A $= [a_{ij}]_{m\times n}$ oraz B $= [b_{ij}]_{n\times p}$. Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz AB określoną w następujący sposób:

$$\mathrm{AB} = [c_{ij}]_{m\times p}\,, \quad \text{gdzie} \quad c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, p)$

Twierdzenie 4.3 Niech $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{n\times p}$, $\mathrm{C} = [c_{ij}]_{p\times q}$ będą macierzami nad ciałem K. Wówczas

$$(\mathrm{AB})\,\mathrm{C} = \mathrm{A}\,(\mathrm{BC})\,.$$

Twierdzenie 4.4 Niech $\lambda \in K$ oraz $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in M_n(K)$. Wówczas

1. $\mathrm{A}\,(\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$ oraz $(\mathrm{B} + \mathrm{C})\,\mathrm{A} = \mathrm{BA} + \mathrm{BC}$ - mnożenie macierzy jest rozdzielne względem ich dodawania
2. $(\lambda\mathrm{A})\,\mathrm{B} = \mathrm{A}\,(\lambda\mathrm{B}) = \lambda\,(\mathrm{AB})$.

Twierdzenie 4.5 Jeżeli $\mathrm{A}, \mathrm{I} \in M_n(K)$, to $\mathrm{AI} = \mathrm{IA} = \mathrm{A}$, co oznacza, że macierz jednostkowa jest elementem neutralnym mnożenia macierzy w $M_n(K)$.

Definicja 4.7 Niech $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$. Macierzą transponowaną do macierzy A nazywamy macierz $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{n\times m}$, której elementy są określone wzorem:

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \text{gdzie} \quad 1 \le i \le n \quad \text{oraz} \quad 1 \le j \le m.$$

Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy przez A^T.

Twierdzenie 4.6 (*własności transponowania macierzy*) Niech $\lambda \in K$ oraz $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_{m\times n}(K)$.

1. $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^T = \mathrm{A}^T + \mathrm{B}^T$,
2. $\left(\mathrm{A}^T\right)^T = \mathrm{A}$,
3. $(\lambda\mathrm{A})^T = \lambda\mathrm{A}^T$,
4. $(\mathrm{AB})^T = \mathrm{B}^T\mathrm{A}^T$.

4.2 Definicja i własności wyznacznika

Definicja 4.8 Wyznacznikiem macierzy nazywamy funkcję

$$\det : M_n(K) \longrightarrow K,$$

która każdej macierzy $\mathrm{A} = [a_{ij}]$ przypisuje liczbę z ciała K. Funkcja ta określona jest wzorem rekurencyjnym:

1. jeżeli macierz A ma stopień $n = 1$, to $\det \mathrm{A} = a_{11}$,
2. jeżeli macierz A ma stopień $n \geq 2$, to

$$\det \mathrm{A} = (-1)^{1+1} a_{11} \det \mathrm{A}_{11}^* + (-1)^{1+2} a_{12} \det \mathrm{A}_{12}^* + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \mathrm{A}_{1n}^*$$

$\left[\text{równoważnie: } \det \mathrm{A} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det \mathrm{A}_{1k}^*\right]$, gdzie A_{ij}^* oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Wyznacznik macierzy A oznaczamy też przez $\det [a_{ij}]$ lub $|\mathrm{A}|$, a w formie rozwiniętej przez

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie 4.7 (*reguły obliczania wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego*)

1. $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc,$
2. $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$ (reguła Sarrusa).

Uwaga: Reguła Sarrusa obliczania wyznaczników **nie przenosi** się na wyznaczniki **wyższych stopni**.

Twierdzenie 4.8 Wyznacznik macierzy dolnotrojkątnej lub górnotrójkątnej jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

4.3 Rozwinięcie Laplace'a

Definicja 4.9 Niech będzie dana macierz $\mathrm{A} \in M_n(K)$, gdzie $n > 1$. Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} nazywamy liczbę określoną następująco:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathrm{A}_{ij}^*,$$

gdzie A_{ij}^* oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Twierdzenie 4.9 (*rozwinięcie Laplace*'a) Niech będzie dana macierz $\mathrm{A} = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Wówczas

$$\det \mathrm{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathrm{A}_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\det \mathrm{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathrm{A}_{kj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Twierdzenie 4.10 (*własności wyznaczników*)

1. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej kolumnę (wiersz) złożoną z samych zer jest równy 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

2. Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przestawimy między sobą dwie kolumny (wiersze).

$$\begin{vmatrix} & a_{1i} & & a_{1j} & \\ & a_{2i} & & a_{2j} & \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ & a_{ni} & & a_{nj} & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} & a_{1j} & & a_{1i} & \\ & a_{2j} & & a_{2i} & \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ & a_{nj} & & a_{ni} & \end{vmatrix}$$

3. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie jednakowe kolumny (wiersze) jest równy 0.

$$\begin{vmatrix} & \alpha & & \alpha & \\ & \beta & & \beta & \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ & \varrho & & \varrho & \end{vmatrix} = 0$$

4. Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny (wiersza) macierzy kwadratowej zawierają wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik macierzy.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & ca_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & ca_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & ca_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ponadto

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \dots & ca_{nn} \end{vmatrix} = c^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. Wyznacznik macierzy kwadratowej, której elementy pewnej kolumny (wiersza) są sumami dwóch składników jest równy sumie wyznaczników macierzy, w których elementy tej kolumny (wiersza) są zastąpione tymi składnikami.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j}+a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j}+a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj}+a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnej kolumny (wiersza) dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny (wiersza) tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+ca_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+ca_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+ca_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7. Wyznacznik macierzy kwadratowej i jej transpozycji są równe.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 4.11 (*Cauchy*) Niech $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_n(K)$. Wówczas

$$\det \mathrm{AB} = \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B}.$$

4.4 Macierz odwrotna

Definicja 4.10 Niech będzie dana macierz $\mathrm{A} \in M_n(K)$. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz oznaczoną przez A^{-1}, spełniającą warunek:

$$\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}$$

Definicja 4.11 Macierz $\mathrm{A} \in M_n(K)$ nazywamy osobliwą, jeżeli

$$\det \mathrm{A} = 0.$$

W przeciwnym wypadku macierz A nazywamy nieosobliwą.

Twierdzenie 4.12 Macierz $\mathrm{A} \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.

Wniosek 4.1 Niech będzie dana macierz nieosobliwa $\mathrm{A} \in M_n(K)$. Wówczas

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Twierdzenie 4.13 (*własności macierzy odwrotnych*) Niech $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_n(K)$ będą macierzami odwracalnymi oraz $\alpha \in K \setminus \{0\}$. Wtedy macierze A^{-1}, A^T, AB, $\alpha\mathrm{A}$ także są odwracalne i prawdziwe są równości:

1. $\det\left(\mathrm{A}^{-1}\right) = (\det \mathrm{A})^{-1}$
2. $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathrm{A}$
3. $\left(\mathrm{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{T}$
4. $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$
5. $(\alpha\mathrm{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathrm{A}^{-1}$

4.5 Rząd macierzy

Definicja 4.12 Niech dana będzie macierz $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(K)$. Minorem stopnia k macierzy A, gdzie $1 \le k \le \min\{m, n\}$, nazywamy wyznacznik macierzy powstałej przez wykreślenie z macierzy A $m-k$ wierszy oraz $n-k$ kolumn.

Definicja 4.13 Rzędem macierzy $\mathrm{A} \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę równą największemu stopniowi jej niezerowych minorów i oznaczamy ją przez $rz\mathrm{A}$.

Z definicji rzędu macierzy wynika, że $rz\mathrm{A} \leq \min\{m, n\}$.

Definicja 4.14 Niech będzie dany zbiór macierzy $M_{m\times n}(K)$. Następujące przekształcenia zbioru $M_{m\times n}(K)$ w siebie nazywają się przekształceniami elementarnymi:

1. transpozycja dwóch kolumn (wierszy) macierzy,
2. pomnożenie dowolnej kolumny (wiersza) macierzy przez dowolny, różny od zera, skalar ciała K,
3. dodanie do dowolnej kolumny (wiersza) macierzy dowolnej innej kolumny (wiersza) tej macierzy, pomnożonej przez dowolną liczbę ze zbioru K.

Twierdzenie 4.14 Przekształcenia elementarne nie zmieniają rzędu macierzy.

Twierdzenie 4.15 Rząd macierzy diagonalnej jest równy liczbie różnych od zera wyrazów jej głównej przekątnej.

Twierdzenie 4.16 Każdą macierz $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ można sprowadzić do postaci diagonalnej za pomocą skończonej liczby przekształceń elementarnych.

Twierdzenie 4.17 Niech $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ oraz $rz\mathrm{A} = k$. Jeżeli M jest niezerowym minorem stopnia k macierzy A, to kolumny (wiersze) macierzy A nie wchodzące w skład minora M można zapisać w postaci sumy kolumn (wierszy) z minora M pomnożonych przez pewne współczynniki.

5 Układy równań liniowych

Definicja 5.1 Układem równań liniowych nad ciałem K nazywamy układ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{ij}, b_i \in K$, $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Skalary a_{ij} nazywamy współczynnikami przy niewiadomych, a b_i - wyrazami wolnymi.

Definicja 5.2 Ciąg skalarów $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, gdzie $c_i \in K$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, nazywamy rozwiązaniem układu równań, jeżeli zachodzą równości:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

Układ równań, który nie ma rozwiązania, nazywamy układem sprzecznym.

Powyższy układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B},$$

gdzie

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Macierz A nazywamy macierzą główną układu równań, macierz X macierzą (kolumną) niewiadomych, a B macierzą (kolumną) wyrazów wolnych.

Definicja 5.3 Macierz

$$[\mathrm{A}|\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą uzupełnioną (rozszerzoną) układu AX = B.

Definicja 5.4 Układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

nazywamy układem jednorodnym.

Definicja 5.5 Dwa układy równań liniowych nazywamy równoważnymi, jeżeli mają ten sam zbiór rozwiązań.

5.1 Układy Cramera

Definicja 5.6 Układem Cramera nazywamy układ równań liniowych AX = B, w którym macierz A jest nieosobliwa, czyli jest macierzą kwadratową, gdzie $\det \mathrm{A} \neq 0$.

Twierdzenie 5.1 Układ Cramera AX = B z n równaniami ma dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorami:

$$x_j = \frac{W_{x_j}}{W}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie $W = \det A$ oraz W_{x_j} jest wyznacznikiem macierzy otrzymanej z macierzy A przez zastąpienie w niej j-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.

5.2 Ogólna teoria układów równań liniowych

Twierdzenie 5.2 (*Kroneckera - Capellego*) Układ równań liniowych $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy głównej układu jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej, tzn.

$$rz\mathrm{A} = rz[\mathrm{A}|\mathrm{B}].$$

Twierdzenie 5.3 Niech $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ będzie układem równań o n niewiadomych.

1. jeżeli $rz\mathrm{A} \neq rz[\mathrm{A}|\mathrm{B}]$, to układ nie ma rozwiązań (układ sprzeczny)
2. jeżeli $rz\mathrm{A} = rz[\mathrm{A}|\mathrm{B}] = n$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (układ oznaczony)
3. jeżeli $rz\mathrm{A} = rz[\mathrm{A}|\mathrm{B}] = r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (układ nieoznaczony)

6 Geometria analityczna w przestrzeni

6.1 Wektory

Definicja 6.1 Przestrzenią R^3 nazywamy zbiór

$$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, x \in R\}$$

Definicja 6.2 Mówimy, że punkty A, B, C przestrzeni R^3 są współliniowe, gdy istnieje prosta, do której należą te punkty.

Definicja 6.3 Mówimy, że punkty K, L, M, N przestrzeni R^3 są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, do której należą te punkty.

Definicja 6.4 Mówimy, że wektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ są współliniowe, gdy istnieje prosta, w której zawarte są te wektory. Wektory współliniowe będziemy nazywać także wektorami równoległymi - piszemy wtedy $a \parallel b$.

Definicja 6.5 Mówimy, że wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, w której zawarte są te wektory.

Twierdzenie 6.1

1. Wektory $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy są liniowo zależne.
2. Wektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy są liniowo zależne.

Definicja 6.6 Układem współrzędnych w przestrzeni nazywamy trzy ustalone proste x, y, z przecinające się w jednym punkcie O, które są wzajemnie prostopadłe. Taki układ współrzędnych oznaczamy przez $Oxyz$. Proste Ox, Oy, Oz nazywamy osiami, a płaszczyzny xOy, yOz, xOz płaszczyznami układu współrzędnych.

Definicja 6.7 W zależności od wzajemnego położenia osi Ox, Oy, Oz układu współrzędnych wyróżniamy dwie jego orientacje: układ prawoskrętny i układ lewoskrętny.

Definicja 6.8 Długość wektora $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ jest określona wzorem:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Twierdzenie 6.2 Niech $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ będą wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in R$. Wtedy:

1. $|\overrightarrow{u}| \geq 0$, przy czym $|\overrightarrow{u}| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2. $|\alpha \overrightarrow{u}| = |\alpha| \cdot |\overrightarrow{u}|$
3. $|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}|$

Definicja 6.9 Wersorem nazywamy wektor o długości l.

Definicja 6.10 Wektory $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ nazywamy wersorami odpowiednio na osiach Ox, Oy, Oz.

6.2 Iloczyn skalarny

Definicja 6.11 Niech $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ będą dowolnymi wektorami w R^3. Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ określamy wzorem:

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos \varphi,$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.

Twierdzenie 6.3 Niech $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ będą dowolnymi wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in R$. Wtedy

1. $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}$
2. $(\alpha \overrightarrow{u}) \circ \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v})$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{w}$
4. $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$
5. $|\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$
6. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$

Twierdzenie 6.4 Niech $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ będą wektorami w R^3. Wtedy

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

6.3 Iloczyn wektorowy

Definicja 6.12 Niech $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ będą wektorami w R^3. Mówimy, że wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ tworzą układ o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych, jeżeli

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0$$

W przypadku, gdy podany wyznacznik jest ujemny mówimy, że orientacja układu wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ jest przeciwna do orientacji układu współrzędnych. Układ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ nazywamy prawoskrętnym (lewoskrętnym), gdy jest on zgodny z prawoskrętnym (lewoskrętnym) układem współrzędnych.

Definicja 6.13 Niech $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ będą niewspółliniowymi wektorami w R^3. Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{w}$, który spełnia warunki:

1. jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, tzn. $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v}$
2. jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, tzn. $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{u}| \cdot \sin\varphi$, gdzie φ jest kątem między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.
3. orientacja trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych $Oxyz$.

Iloczyn wektorowy pary wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ oznaczamy przez $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Jeżeli jeden z wektorów $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ jest wektorem zerowym lub jeżeli wektory te są współliniowe, to przyjmujemy, że $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Twierdzenie 6.5 Niech $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ będą wektorami w R^3. Wtedy

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

gdzie $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ oznaczają wersory odpowiednio na osiach Ox, Oy, Oz.

Twierdzenie 6.6 Niech $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ będą dowolnymi wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in R$. Wtedy

1. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$
2. $(\alpha\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$
4. $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$
5. $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$
6. $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

6.4 Iloczyn mieszany

Definicja 6.14 Niech $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ będą wektorami w R^3. Iloczyn mieszany uporządkowanej trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ określamy wzorem:

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}$$

Twierdzenie 6.7 (interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego wektorów) Iloczyn mieszany wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ jest równy (z dokładnością do znaku) objętości równoległościanu V rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$,

$$|V| = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}|$$

Twierdzenie 6.8 Niech $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ będą wektorami w R^3. Wtedy

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 6.9 Niech $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{r}$ będą wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in R$. Wtedy

1. $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{u}$
2. $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) \circ \overrightarrow{w}$
3. $((\overrightarrow{u} + \overrightarrow{r}) \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} + (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}$
4. $((\alpha\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \alpha((\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w})$
5. wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ są współpłaszczyznowe $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = 0$
6. $|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}| \leq |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|$

6.5 Równania płaszczyzny

Twierdzenie 6.10 Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ o promieniu wodzącym $\overrightarrow{r}_0$ i prostopadłej do niezerowego wektora $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ ma postać

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

lub w postaci wektorowej

$$\pi : (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) \circ \overrightarrow{n} = 0$$

Równania te nazywamy równaniami normalnymi płaszczyzny π.

Twierdzenie 6.11 Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ o promieniu wodzącym $\overrightarrow{r}_0$ i rozpiętej na niewspółliniowych wektorach $\overrightarrow{u} = (a_1, a_1, a_1)$, $\overrightarrow{v} = (b_2, b_2, b_2)$ ma postać

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + a_1 t + b_1 s \\ y = y_0 + a_2 t + b_2 s \\ z = z_0 + a_3 t + b_3 s \end{cases}, \quad \text{gdzie} \quad t, s \in R$$

lub w postaci wektorowej

$$\pi : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}, \quad \text{gdzie} \quad t, s \in R$$

Równania te nazywamy równaniami parametrycznymi płaszczyzny π.

Twierdzenie 6.12 Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy niewpółliniowe punkty $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ ma postać:

1.
$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.
$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Twierdzenie 6.13 Równanie płaszczyzny π odcinającej na osiach Ox, Oy, Oz układu współrzędnych odpowiednio odcinki (zorientowane) $a, b, c \neq 0$ ma postać:

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Równanie to nazywamy równaniem odcinkowym płaszczyzny π.

6.6 Równania prostej

Twierdzenie 6.14 Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ o promieniu wodzącym $\overrightarrow{r}_0$ i równoległej do niezerowego wektora $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ ma postać

$$l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

lub w postaci wektorowej

$$l : (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Postać tą nazywamy równaniem kierunkowym prostej l.

Twierdzenie 6.15 Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ o promieniu wodzącym $\overrightarrow{r}_0$ i równoległej do niezerowego wektora $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ ma postać

$$l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad \text{gdzie} \quad t \in R$$

lub w postaci wektorowej

$$l : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\overrightarrow{v}, \quad \text{gdzie} \quad t \in R$$

Równania te nazywamy równaniami parametrycznymi prostej l.

Twierdzenie 6.16 Równanie prostej l, będącej częścią wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ma postać

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Postać tą nazywamy równaniem krawędziowym prostej l.

6.7 Wzajemne położenie punktów, płaszczyzn i prostych

Definicja 6.15 Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π nazywamy punkt P' tej płaszczyzny spełniający warunek:

$$\overrightarrow{PP'} \perp \pi.$$

Definicja 6.16 Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l nazywamy punkt P' tej prostej spełniający warunek:

$$\overrightarrow{PP'} \perp l.$$

Twierdzenie 6.17 Odległość punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Definicja 6.17 Kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny π nazywamy kąt $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α jest kątem ostrym między wektorem normalnym płaszczyzny π i wektorem kierunkowym prostej l.

Definicja 6.18 Kątem między prostymi nazywamy kąt ostry utworzony przez wektory kierunkowe tych prostych.

Definicja 6.19 Kątem między płaszczyznami nazywamy kąt ostry między wektorami normalnymi tych płaszczyzn.