

Zadania z algebry (2)

Stanisław Ewert-Krzemieniewski

October 29, 2009

1 Zadania

1. Oblicz wyznaczniki podanych macierzy.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}, \text{ b) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ c) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & a & z \\ 0 & c & 0 & 0 & y \\ d & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

2. Wiadomo, że $\det A = 2$, $\det B = 3$. Oblicz wyznaczniki podanych macierzy.

$$A^2, ABA, BABA, P^{-1}AP, B^{-1}AB^{-1} (AB)^{-1}(BA).$$

3. Oblicz wyznaczniki iloczynów macierzy.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} a & 20 & 400 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 123 & 14 & -23 \\ 80 & 1 & 134 \\ 78 & 56 & 34 \end{bmatrix}, \text{ b) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 78 \\ 1 & 124 & 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 127 & 100 & 3 \\ 345 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\text{c) } \begin{bmatrix} 234 & 12 & 5 \\ 12 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 564 & 20 & 4 \\ 100 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ d) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 50 \\ 1 & 78 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 78 \\ 2 & 56 & 67 \end{bmatrix}.$$

4. Rozwiąż podane układy równań stosując metodę wyznaczników.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ -x + 2y + 2z = 3 \\ -2x + 4y + 3z = 5 \end{cases}, \text{ b) } \begin{cases} -2x + 3y + 2z = 5 \\ -x - 4y + 2z = -2 \\ -2x + 4y + 3z = 7 \end{cases},$$
$$\text{c) } \begin{cases} -4x + 3y + 2z = -7 \\ x - 4y + 2z = -4 \\ -2x + 4y + 3z = -3 \end{cases}, \text{ d) } \begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ -x - 4y + 2z = -6 \\ -2x + 5y - 3z = 0 \end{cases},$$

$$e) \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + z = 0 \end{cases}, \quad f) \begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -x - 4y + z = 0 \\ -2x + 4y + 3z = 1 \end{cases}.$$

5. Dla jakich wartości parametru a podane układy równań posiadają rozwiązania? Znajdź te rozwiązania.

$$a) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + ay = 4 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + ay = \frac{15}{2} \end{cases}, \quad c) \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x - ay = 10 \end{cases},$$

$$d) \begin{cases} ax + y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}, \quad e) \begin{cases} ax - y = 4 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}, \quad f) \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 6x - ay = 0 \end{cases}.$$

6. Dla jakich wartości parametrów a, b podane układy równań posiadają rozwiązania? Znajdź te rozwiązania.

$$a) \begin{cases} 2x - 5y = -3 \\ 3x + y = 4 \\ -4x + ay = 5 \\ bx + 2by = 9 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 2y = -5 \\ -4x + 2ay = 8 \\ bx + y = 0 \end{cases}, \quad c) \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -2x + y = -3 \\ bx + ay = 5 \\ bx + 2by = 8 \end{cases}.$$

7. Metodą eliminacji Gaussa rozwiąż układy równań.

$$a) \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 7 \\ -x + 4y - 2z = -4 \\ 3x - 3y + 3z = 12 \\ x + 4y - z = 3 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - 2z = -6 \\ 3x - 4y + 5z = 6 \\ 2x + 3y - 6z = 6 \end{cases},$$

$$c) \begin{cases} -x + 2y - 7z = -16 \\ 2x + 3y - 2z = 7 \\ -3x + 4y - 3z = -14 \\ 3x - 2y + 3z = 16 \end{cases}, \quad d) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - 2z = -6 \\ x - 5y + z = -6 \\ -2x - 5y - 2z = -18 \end{cases},$$

$$e) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + y - 2z = 6 \\ x + 7y + 7z = 6 \\ 3x + 26y + 25z = 24 \end{cases}, \quad f) \begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ -2x - y + 3z = 0 \\ 2x - 5y + 4z = 2 \\ x - 5y + 2z = -2 \end{cases}.$$

8. Rozwiąż podane układy równań.

$$a) \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - 4y = 12 \\ -3x + 6y = 6 \\ 6x - 10y = 14 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - 4y = 4 \\ -3x + 6y = -6 \\ 6x - 10y = 14 \end{cases}, \quad c) \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - 4y = 4 \\ -3x + 6y = -6 \\ 6x - 10y = 10 \end{cases}.$$

2 Odpowiedzi:

1. a) $-abcde$, b) $abcde$, c) $abcde$.
2. 4, 12, 36, 2, $\frac{2}{9}$, 1.
3. a) 0, b) -78 , c) 240, d) 60.
4. a) $\{z = 1, y = 1, x = 1\}$, b) $\{z = 1, y = 1, x = 0\}$, c) $\{y = 1, z = -1, x = 2\}$,
d) $\{x = 2, y = 2, z = 2\}$, e) $\{x = 0, z = 0, y = 0\}$, f) $\{z = 1, x = 1, y = 0\}$.
5. a) $\left\{x = \frac{5a+4}{3+2a}, y = -\frac{7}{3+2a}, a \neq -\frac{3}{2}\right\}$, brak rozwiązania dla $a = -\frac{3}{2}$,
b) $\left\{y = 0, x = \frac{5}{2}, a \neq -\frac{3}{2}\right\}$, $\{y = 2x - 5, x = x, a = -\frac{3}{2}\}$,
c) $\left\{x = \frac{5}{3}, y = 0, a \neq -4\right\}$, $\left\{x = x, y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}, a = -4\right\}$,
d) $\{y = 4, x = 0, a \neq 3\}$, $\{y = -3x + 4, x = x, a = 3\}$,
e) $\left\{y = -\frac{-12+5a}{a-3}, x = -\frac{1}{a-3}, a \neq 3\right\}$, brak rozwiązania dla $a = 3$,
f) $\{x = 0, y = 0, a \neq -4\}$, $\{y = -\frac{3}{2}, x = x, a = -4\}$.
6. a) $\{a = 9, b = 3, x = y = 1\}$, b) $\{a = 2, b = -1, x = -1, y = 1\}$,
c) $\{a = 1, b = 2, x = 2, y = 1\}$.
7. a) $\{y = 1, z = 3, x = 2\}$, b) $\{y = 2, z = 1, x = 3\}$, c) $\{y = 1, z = 2, x = 4\}$,
d) $\{y = 2, x = 4 - z, z = z\}$,
e) $\left\{z = -\frac{5}{4}y + \frac{3}{2}, x = \frac{7}{4}y - \frac{9}{2}, y = y\right\}$, f) brak rozwiązania.
8. a) brak rozwiązania, b) $\{y = 1, x = 4\}$, c) brak rozwiązania.