

1. Wykazać, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzi

$$\text{a) } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \text{b) } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{c) } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie

$$\begin{aligned} \text{a) } z^2 - (4 + i)z + 9 + 7i &= 0 \\ \text{b) } (1 + i)z^2 - (4 + 6i)z + 7 + 9i &= 0 \\ \text{c) } (1 - i)z^2 - (4 - 2i)z + 7 - 9i &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązania pozostawić w postaci algebraicznej. Wynik sprawdzić.

Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór liczb w takich, że $|w| < |z_1|$ oraz $\text{Arg}(w) < \text{Arg}(z_2)$, gdzie z_1, z_2 są rozwiązaniami powyższych równań.

3. Obliczyć

$$\text{a) } \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{12} \quad \text{b) } \frac{(1 + i\sqrt{3})^6}{(1 + i)^8} \quad \text{c) } \left(\frac{-1 + 5i}{2 + 3i}\right)^6$$

4. Wyznaczyć pierwiastki zespolone 3-go stopnia z liczby z

$$\text{a) } z = 1 \quad \text{b) } z = -1 \quad \text{c) } z = -\sqrt{3} + i$$

5. Obliczyć granice

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + 3}{4n^3 - 2n + 2} \\ \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n - \sqrt{9n^2 + 4n - 5}\right) \\ \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n + 3}{2n^2 - 2n + 2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

6. Podać definicję ciągłości funkcji w punkcie x_0 . Zbadać ciągłość funkcji

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x + 5}, & x \neq -5 \\ -10, & x = -5. \end{cases} & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{\ln x}{\ln \sin x} & x \in (0, \pi) \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

7. Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie x_0 . Wyznaczyć z definicji pochodną funkcji f w punkcie $x \in D_f$

$$\text{a) } f(x) = \sin 3x \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad \text{c) } f(x) = \cos \sqrt{3x + 2}$$

8. Podać twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej i wykorzystać je do wyznaczenia pochodnej funkcji

a) $f(x) = \ln \sqrt{x}$, $x > 0$ b) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$, $x \geq 0$ c) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$, $x \geq 0$

9. Zbadać ekstrema lokalne, monotoniczność oraz asymptoty następujących funkcji

a) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$, b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$, c) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$,
d) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$, e) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$, f) $f(x) = \cos x - \ln \cos x$,

10. Znaleźć punkty przegięcia oraz przedziały wypukłości wykresów funkcji

a) $y = x + \frac{4}{x}$, b) $y = (x+2)\operatorname{arctg} x$, c) $y = 2 \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$.

11. Rozwiązać równanie

a) $X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + 2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
c) $X \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. Rozwiązać podane układy równań

a) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 5 \\ x - y + 2z = 13 \\ 3x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y + 2z + t = -1 \\ 2x + 3y - z + 3t = 2 \\ 4x - 7y + 5z - t = -4 \\ -x + 5y - 3z + 2t = 3 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = 7 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$